Lógica de predicados

Enric Sesa i Nogueras

PID_00149519



Índice

Introducción

Todo sistema formal tiene sus limitaciones. La **lógica de enunciados** no es una excepción. Su simplicidad tiene una recompensa: es un vehículo ideal para transmitir los conceptos básicos sobre los cuales se construye el edificio de esta disciplina, pero también tiene un precio: es excesivamente simple para poder ser una verdadera herramienta de trabajo.

No hay que preocuparse, porque una vez adentrados en el mundo de la lógica, por medio de los enunciados y de su lenguaje, de la deducción natural y sus reglas, de las tablas de verdad y del método de resolución, es el momento de tratar más profundamente este ámbito y estudiar la lógica de predicados.

En este módulo didáctico entraréis en el mundo de la **lógica de predicados** y conoceréis el lenguaje que le es propio: el lenguaje de las fórmulas. Con este lenguaje aprenderéis a formalizar razonamientos que estaban fueran del modesto alcance del lenguaje de enunciados. Veréis que muchos de los aspectos de los que tratará no os son nada ajenos: habrá que validar razonamientos, utilizando una versión ampliada de la deducción natural conocida; refutarlos buscando contraejemplos; calcular formas normales y, por supuesto, estudiar el método que permite mecanizar la tarea de validación: la resolución.

Observaréis que este módulo tiene un paralelismo estrecho con el anterior. Y esto es así porque el objetivo es el mismo –**formalizar y validar razonamientos**–, pero el lenguaje es más expresivo, es decir, más potente. El incremento de expresividad comporta la necesidad de adaptar las herramientas conocidas.

Al final, veréis uno de los puntos donde la lógica y la informática confluyen, la **programación lógica** y su lenguaje por excelencia: Prolog.

Repetimos el mismo consejo que os dimos en el módulo didáctico anterior: leed, entended e intentad rehacer los muchos ejemplos que encontraréis.

Objetivos

En los materiales didácticos facilitados en este módulo encontraréis las herramientas necesarias para conseguir, después del estudio y la asimilación, los objetivos que se enumeran a continuación:

1. Darse cuenta de la limitación expresiva del lenguaje de enunciados y del incremento en expresividad que aporta el lenguaje de fórmulas.

2. Saber expresar en el lenguaje de la lógica de predicados aquellos razonamientos expresados en lenguaje natural que son susceptibles de ser formalizados.

3. Conocer las reglas de inferencia de la deducción natural que manipulan cuantificadores, y darse cuenta tanto de sus posibilidades como de sus limitaciones. Apoyar la comprensión de los cuantificadores y de su papel en el conocimiento de estas reglas.

4. Poder dar contraejemplos que expliquen, aunque de una manera limitada, la razón por la cual un razonamiento no es formalmente correcto.

5. Manipular algebraicamente las fórmulas para expresarlas en la forma normal de Skolem.

6. Conocer el método de resolución y aplicarlo con desenvoltura para validar razonamientos expresados en el lenguaje de fórmulas.

7. Tener un primer contacto con una de las aplicaciones de la lógica de predicados y, en concreto, de la mecanización del método de resolución en el mundo de la informática: la programación lógica.

1. La lógica de predicados y su lenguaje

1.1. La capacidad expresiva del lenguaje de enunciados es limitada

La capacidad expresiva del lenguaje de enunciados es bastante limitada: no cualquier frase declarativa simple se puede formalizar convenientemente. Este hecho tiene como consecuencia que un gran número de razonamientos que se pueden expresar utilizando el lenguaje natural no se puedan validar utilizando las herramientas de la lógica de enunciados.

Ejemplo de las limitaciones de la lógica de enunciados

A continuación presentamos un ejemplo bastante revelador de las carencias de la lógica de enunciados y de su lenguaje. Imaginemos el razonamiento (correcto) siguiente: "Los estudiantes son personas. Juan es un estudiante. Así pues, Juan es una persona."

- La formalización (correcta) sería la siguiente: si asignamos P a "los estudiantes son personas", Q a "Juan es un estudiante" y R a "Juan es una persona", entonces tenemos que:

  $$P, Q \therefore R,$$

  no permite validar el razonamiento.

- Otra formalización (que también se puede considerar correcta) es: si asignamos P a "ser estudiante", Q a "ser persona", R a "Juan es un estudiante" y S a "Juan es una persona", entonces observamos que:

  $$P \rightarrow Q, R \therefore S,$$

  tampoco permite validar el razonamiento.

La **lógica de predicados** es una ampliación de la lógica de enunciados que cuenta con un lenguaje formal más rico (más expresivo) y con un conjunto de reglas que permiten validar razonamientos expresados utilizando este lenguaje. La lógica de enunciados se debe entender, a partir de este momento, como un subconjunto de la lógica de predicados.

1.2. El lenguaje de la lógica de predicados

1.2.1. Predicados, variables y constantes

Un **predicado** es una aplicación definida en un dominio que adquiere valores en el conjunto de enunciados. Formalmente se expresa de la manera siguiente:

$$P(x): D \rightarrow \text{enunciados}.$$

Informalmente, un predicado es un enunciado parametrizado (con variables).

Representaremos un predicado utilizando una letra mayúscula del alfabeto latino, con los parámetros, preferentemente representados por letras minúsculas del mismo alfabeto a partir de *x*, entre paréntesis y separados por comas.

Por ejemplo, el predicado $P(x)$ podría ser la formalización de "*x* es un estudiante".

Notad que el predicado $P(x)$ no es un enunciado. $P(x)$ se puede convertir en un enunciado sustituyendo la variable *x* (el parámetro) por algún elemento de su dominio. Si el dominio de *x* es el conjunto de las personas, entonces *P*(Juan) sí es un enunciado (y se corresponde con "Juan es un estudiante").

Ejemplo

La función $f(x) = x^2 + 1$, con *x* en el dominio de los números reales, no es un número. Sin embargo, $f(x)$ puede convertirse en un número real sustituyendo *x* por algún elemento de su dominio. Así, $f(3) = 10$ sí que es un número real.

Por regla general, no se habla de parámetros, sino de variables. Así lo haremos a partir de este momento: !

Un predicado puede tener cualquier número ($n \geq 0$) de variables. Según este número, los **predicados** se clasifican de la manera siguiente:

1) Los predicados con $n = 0$ variables son los **enunciados**.

2) Los predicados con $n = 1$ variables se denominan **propiedades** o **predicados unarios**.

3) Los predicados con $n = 2$ variables se denominan **relaciones** o **predicados binarios**.

4) A partir de $n = 3$ no existen nombres específicos. Un predicado con tres variables se puede denominar **relación ternaria**; uno con cuatro, **relación cuaternaria**, etc.

Ejemplos de predicados con diferente número de variables

a) Ejemplos de propiedades o predicados unarios:

- $P(x)$: "*x* es una persona".
- $Q(x)$: "*x* es de color rojo".

b) Ejemplos de relaciones o predicados binarios:

- $P(x,y)$: "*x* come *y*".
- $Q(x,y)$: "El cuadrado de *x* es *y*".

c) Ejemplos de relaciones ternarias:

- $R(x,y,z)$: "*x* saluda a *y* en la calle *z*".
- $S(x,y,z)$: "La suma de *x* y de *y* es *z*".

El **dominio de una variable** es todo el conjunto de objetos que la pueden sustituir.

En referencia al dominio de una variable, debéis tener presentes los siguientes aspectos:

1) Todo dominio se supone no vacío (es decir, diferente de ∅).

2) Los predicados no pueden ser elementos de ningún dominio. Así pues, ninguna variable puede ser sustituida por ningún predicado.

Una **constante** es la representación de un elemento de un dominio.

Las constantes se representan mediante letras minúsculas del alfabeto latino. Se eligen, preferentemente, a partir de la letra *a*, para evitar confusiones con las letras que representan las variables.

Cuando todas las variables de un predicado son sustituidas por constantes, entonces éste se convierte en un enunciado. Así:

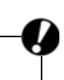
a) *P*(*x*,*y*,*z*) es un predicado, pero no un enunciado.

b) *P*(*a*,*b*,*c*) y *P*(*a*,*a*,*d*) son enunciados.

c) *P*(*a*,*y*,*z*) y P(*x*,*e*,a) son una relación y una propiedad, respectivamente.

Las variables y las constantes se denominan **términos** cuando la distinción no es importante.

1.2.2. Cuantificadores



Recordad que las conectivas se tratan en el subapartado 1.3 del módulo "Lógica de enunciados".

Los **cuantificadores** son los dos operadores que el lenguaje de la lógica de predicados añade a las conectivas, ya conocidas, del lenguaje de enunciados. Los dos operadores específicos del lenguaje de la lógica de predicados se corresponden, aproximadamente, con aquellas construcciones del lenguaje natural que tienen un significado de 'todos los.../todas las...'y de 'algún o algunos/alguna o algunas...'. Se representan con los símbolos ∀ y ∃, respectivamente. Son unarios, tienen prioridad máxima y afectan a las variables.

A continuación, presentamos la tabla resumen de los cuantificadores:

Cuantificadores			
Símbolo	**Nombre**	**Significado**	**Correspondencia (aproximadamente)**
$\forall$	Cuantificador universal	'(para) todo'	todos los... todas las... cada...
$\exists$	Cuantificador existencial	'existe (alguno)'	hay un... existe un... algún o algunos...

Ejemplos con cuantificadores

Si $P(x)$ quiere decir "x es un estudiante", entonces:

- $\exists x\ P(x)$ significa 'hay estudiantes', 'existen estudiantes', 'algunos son estudiantes', 'alguno es un estudiante', etc.
- $\forall x\ P(x)$ significa 'todos son estudiantes', 'todo el mundo es estudiante', etc.

1.2.3. Fórmulas

El lenguaje de la lógica de predicados se denomina **lenguaje de fórmulas**.

Este lenguaje utiliza como alfabeto las cuatro conectivas del lenguaje de enunciados, los dos cuantificadores, los símbolos de predicados, los símbolos de constantes, los símbolos de variables y los paréntesis de apertura y de cierre.

$$\textbf{Alfabeto} = = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, P, Q, R, \ldots, \underbrace{\underbrace{a, b, c,}_{\text{Constantes}} \ldots, \underbrace{x, y, z,}_{\text{Variables}}}_{\text{Términos}} (,)\}.$$

Las **reglas** siguientes definen cómo hay que construir fórmulas correctamente a partir de los elementos básicos:

1) Si P es un símbolo de predicado y $t_1, \ldots, t_n$ ($n \geq 0$) son símbolos de términos, entonces $P(t_1,\ldots,t_n)$ es una fórmula. Estas fórmulas también se denominan **átomos** o **fórmulas atómicas**.

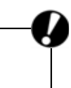
2) Si B y A son fórmulas, entonces $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \rightarrow B)$ también son fórmulas.

3) Si A es una fórmula y x es una variable, entonces $(\forall x\ A)$ y $(\exists x\ A)$ también son fórmulas.

4) A excepción de los casos expuestos anteriormente, no hay ninguna otra fórmula.

Observad a partir del alfabeto y de las reglas de construcción que el lenguaje de enunciados es un subconjunto del lenguaje de fórmulas.

En el lenguaje de fórmulas se utilizan las mismas convenciones que en el lenguaje de enunciados para hacer la notación menos pesada. Los cuantificadores tienen la misma prioridad, que es máxima (por encima de $\neg$). En algunos casos, y para mejorar la legibilidad, utilizaremos los corchetes '[' y ']' y las llaves '{' y '}'.



Observad las convenciones utilizadas para construir enunciados en el subapartado 1.4. del módulo "Lógica de enunciados".

1.2.4. Ámbito de los cuantificadores

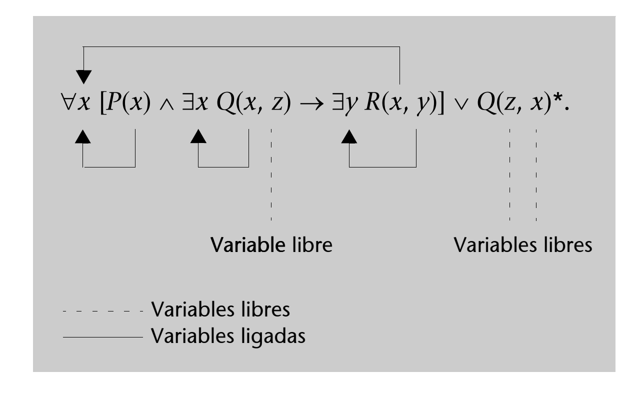
Se denomina **ámbito de un cuantificador** a aquella zona de una fórmula que está dentro de su campo de acción, es decir, bajo sus efectos.

Las **variables** que están afectadas por la acción de algún cuantificador se denominan **variables ligadas**. Las no afectadas por ningún cuantificador se denominan **variables libres**.

Las **fórmulas** sin ninguna variable libre se denominan **fórmulas cerradas**. Las que tienen alguna variable libre, **fórmulas abiertas**.

Ejemplo de variables libres y de variables ligadas

Mostramos un ejemplo de variables libres y de variables que están bajo la influencia de algún cuantificador:



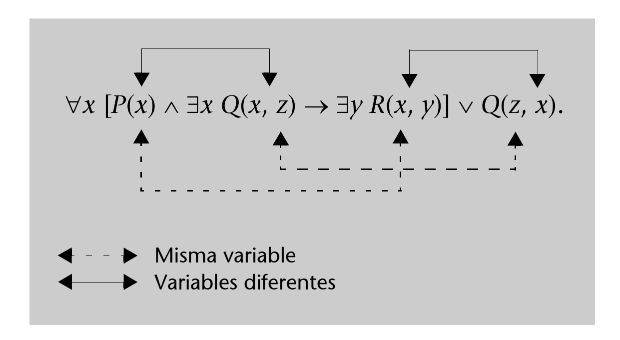
* Notad que la parentización tiene efectos sobre el ámbito de los cuantificadores.

Cuando dos variables están designadas por el mismo símbolo (misma letra) decimos que:

1) Son la misma variable si están bajo el alcance del mismo cuantificador, o si las dos son libres.

2) Son variables diferentes si están bajo el alcance de cuantificadores distintos, o si una es libre y la otra no.

Exponemos algunos ejemplos de variables diferentes y de variables que son la misma en el gráfico siguiente:



Evitad confusiones innecesarias dando nombres diferentes a variables diferentes.

Así, el ejemplo que acabamos de ver también se podría haber escrito de la manera siguiente: $\forall u\ [P(u) \wedge \exists t\ Q(t,z) \rightarrow \exists y\ R(u,y)] \vee Q(z,x)$.

1.2.5. El significado de los cuantificadores

Cuando todas las variables que aparecen en una fórmula están cuantificadas, la **fórmula** es un **enunciado**. Los cuantificadores representan la sustitución de las variables cuantificadas por elementos del dominio.

Cuando el dominio de las variables es finito, se puede entender la **cuantificación universal** como una forma abreviada de la **conjunción**, y la **cuantificación existencial** como una forma abreviada de la **disyunción**.

Ejemplo de sustitución de cuantificadores por conectivas

Si el dominio de la variable x es el conjunto {1, 2, 3, 4 }, entonces:

- La fórmula $\forall x\ P(x)$ se puede entender como $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.
- La fórmula $\exists x\ P(x)$ se puede entender como $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.

Si el dominio tiene cardinalidad infinita, estas sustituciones no se pueden hacer. Incluso en el caso de dominios de cardinalidad finita, las sustituciones de las variables por todas las constantes no se llevan nunca a la práctica. Se trata, más que nada, de una forma de entender el significado de los cuantificadores.

1.3. La formalización

1.3.1. Cómo formalizar

La formalización de frases y/o de razonamientos en el lenguaje de la lógica de predicados es una actividad parecida a la que se hace cuando se utiliza el lenguaje de la lógica de enunciados.

De manera general, los pasos que habrá que seguir son los siguientes: 

1) **Determinar el dominio**. Se entenderá por dominio el conjunto de todos los objetos de los cuales se hablará. Los predicados serán unos u otros según cuál sea el dominio. Para determinar el dominio, habrá que responder a la pregunta "¿de qué se habla?". Cuando no es fácil responder a esta pregunta o el dominio no admite una definición simple, puede decirse que el dominio es un conjunto cualquiera no vacío.

El dominio

A efectos prácticos, decir que el dominio es un conjunto cualquiera no vacío es lo mismo que decir que cualquier objeto imaginable pertenece o puede pertenecer al dominio.

2) **Determinar los predicados atómicos**. En este caso, habrá que preguntarse:

- ¿Qué subconjuntos se consideran dentro del dominio (que no se quiera o no sea necesario definir en término de subconjuntos más simples)?
- ¿Qué se dice de los objetos del dominio? ¿Cuáles son sus propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?

3) Determinar si hay **elementos concretos** del dominio que son identificables del resto. A cada uno le corresponderá una constante.

4) **Formalizar** cada frase simple en términos de los predicados atómicos y las constantes identificadas en los dos puntos anteriores. El resultado debe ser una fórmula sin variables libres para cada frase. Para decidir la cuantificación adecuada para cada fórmula se prestará atención al sentido general (cuantificación universal: $\forall$) o particular (cuantificador existencial: $\exists$) de la frase.

Fórmulas con variables libres

Si una fórmula que formaliza una frase contiene variables libres, ¡seguro que no es correcta!

A continuación proponemos algunos ejemplos de formalización.

¡Atención!

Prestad atención a la elección del dominio y la elección de predicados atómicos en estos ejemplos. Quizá de momento os costará un poco entender las formalizaciones, pero no os preocupéis, ya las entenderéis más adelante.

Ejemplo 1

> "Las setas son apreciadas por su sabor. Todo lo que es apreciado por su sabor o por sus propiedades curativas es caro. Los níscalos son setas. Así pues, los níscalos son caros."

Como dominio para formalizar este razonamiento se considerará un conjunto no vacío cualquiera, porque la pregunta "¿de qué se habla?" no puede responderse de manera precisa (se habla de setas, de níscalos, de cosas apreciadas por su sabor, de cosas apreciadas por sus propiedades curativas y de cosas caras. Lo máximo que podríamos precisar sería algo como por ejemplo "el conjunto de todas estas cosas").

Se asignan los significados siguientes a predicados atómicos: $B(x)$: "x es una seta"; $S(x)$: "x es apreciado por su sabor"; $P(x)$: "x es apreciado por sus propiedades curativas"; $R(x)$: "x es un níscalo"; $C(x)$: "x es caro".

La formalización del razonamiento sería, pues:

$$\forall x\ (B(x) \rightarrow S(x)),\ \forall x\ (S(x) \vee P(x) \rightarrow C(x)),\ \forall x\ (R(x) \rightarrow B(x))\ \therefore\ \forall x\ (R(x) \rightarrow C(x))$$

Ejemplo 2

> "Hay personas honradas y hay personas sensatas. Las personas honradas siempre son sensatas. Podemos concluir que hay personas que son honradas y sensatas."

En este razonamiento sólo se hace referencia a personas, por lo cual podemos decidir que el dominio será un conjunto de personas no vacío (o el conjunto de todas las personas). Como predicados atómicos se utilizarán: $H(x)$: "x es honrado y $A(x)$: "x es sensato". Observad que, dado que el dominio sólo contiene personas, esto es exactamente lo mismo que $H(x)$: "x es una persona honrada" y $A(x)$: "x es una persona sensata".

La formalización del razonamiento es:

$$\exists x\ H(x) \wedge \exists y\ A(y),\ \forall x\ (H(x) \rightarrow A(x))\ \therefore\ \exists x\ (H(x) \wedge A(x))$$

Observad que la primera premisa es la conjunción de dos fórmulas cuantificadas.

Si el dominio elegido hubiese sido un conjunto no vacío cualquiera, entonces se habría podido hacer la siguiente asignación de significado a predicados atómicos: $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; $A(x)$: "x es sensato"; y la formalización sería:

$$\exists x\ (P(x) \wedge H(x)) \wedge \exists y\ (P(y) \wedge A(y)),\ \forall x\ (P(x) \wedge H(x) \rightarrow A(x))\ \therefore\ \exists x\ (P(x) \wedge H(x) \wedge A(x))$$

Ejemplo 3

> "Los que están tristes rinden por debajo de sus posibilidades. Hay quienes no están tristes y que tienen dificultades. Relámpago no está triste, pero rinde por debajo de sus posibilidades. Entonces es que Relámpago tiene dificultades."

Como dominio, consideraremos un conjunto cualquiera no vacío, que contiene un elemento singular (Relámpago). Lo que hace que sea singular es que nos referimos a él por el nombre.

Asignaremos los significados a los predicados atómicos siguientes: $T(x)$: "x está triste"; $R(x)$: "x rinde por debajo de sus posibilidades"; $D(x)$: "x tiene dificultades".

Para designar a Relámpago se utilizará una constante, a: "Relámpago".

La formalización del razonamiento será:

$$\forall x\ (T(x) \rightarrow R(x)),\ \exists x\ (\neg T(x) \wedge D(x)),\ \neg T(a) \wedge R(a)\ \therefore\ D(a)$$

1.3.2. Formalización de frases con significado existencial o universal

Las frases de la forma “hay ...”, “hay quien...”, “algunos...” tienen un sentido existencial. Esto, en el contexto de la lógica de predicados, quiere decir que se refieren a algunos elementos de un subconjunto del dominio.

Las frases de la forma “todos los...”, “los...”, “todo el mundo que...” tienen un sentido universal. En el contexto de la lógica de predicados, esto significa que se refieren a todos los elementos de un subconjunto del dominio.

Para formalizar frases con cualquiera de estos dos significados, es útil hacerse las preguntas siguientes:

1) ¿A qué subconjunto del dominio se hace referencia? Este subconjunto se denominará *selección*.

2) ¿Qué se dice de este subconjunto del dominio? ¿Qué propiedad o propiedades tienen sus elementos? Denominaremos a esto *propiedades de la selección.*

Las frases con sentido existencial se formalizan según el patrón siguiente:

$$\exists x\ (Selección(x) \wedge Propiedades_de_la_selección(x))$$

Observación

Observad que en la formalización de una frase con sentido existencial, las dos partes –selección y propiedades de ésta– se unen con una conjunción, mientras que si el sentido es universal, lo hacen con una implicación.

Asimismo, frases con sentido universal se formalizan según el patrón siguiente:

$$\forall x\ (Selección(x) \rightarrow Propiedades_de_la_selección(x))$$

Si con $P(x)$: “x es un programa”; $A(x)$: “x es antiguo”; $V(x)$: “x tiene un valor considerable”; $C(x)$: “El mantenimiento de x es complicado”, formalizamos las frases “Algunos programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” y “Todos los programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” obtendremos, respectivamente:

$$\exists x\ (\underbrace{P(x) \wedge A(x)}_{\text{Selección}} \wedge \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\text{Propiedades de la selección}})$$

$$\forall x\ (\underbrace{P(x) \wedge A(x)}_{\text{Selección}} \rightarrow \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\text{Propiedades de la selección}})$$

A continuación presentamos algunos ejemplos de formalización.

Ejemplo 1

Formalizar la frase "Hay programas correctos que no satisfacen al usuario" con las asignaciones $P(x)$: "x es un programa"; $C(x)$: "x es correcto"; $S(x)$: "x satisface al usuario":

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: la frase hace referencia a aquellos elementos del dominio que son simultáneamente "programas" y "correctos".
- **Propiedades de la selección**: de los elementos seleccionados (algunos), dice que no satisfacen al usuario:

$$\exists x\ (P(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x))$$

Ejemplo 2

Formalizar la frase "Todos los directivos importantes llevan corbata" con $D(x)$: "x es un directivo"; $I(x)$: "x es importante"; $C(x)$: "x lleva corbata":

- **Sentido**: universal.
- **Selección**: elementos del dominio que son al mismo tiempo "directivos" e "importantes".
- **Propiedades de la selección**: los elementos seleccionados llevan corbata:

$$\forall x\ (D(x) \wedge I(x) \rightarrow C(x))$$

Ejemplo 3

Formalizar "Los ordenadores viejos y los que no han sido actualizados, ni funcionan correctamente ni se pueden mantener" con $O(x)$: "x es un ordenador"; $V(x)$: "x es viejo"; $A(x)$: "x ha sido actualizado"; "$F(x)$: "x funciona correctamente"; $M(x)$: x puede mantenerse":

- **Sentido**: universal.
- **Selección**: elementos del dominio que son ordenadores viejos o que son ordenadores que no han sido actualizados.
- **Propiedades de la selección**: los elementos seleccionados no funcionan correctamente y no se pueden mantener:

$$\forall x\ (O(x) \wedge (V(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow \neg F(x) \wedge \neg M(x))$$

Ejemplo 4

Formalizamos la frase "Algunos navegantes se marean cuando se acercan a puerto" con $N(x)$: "x es un navegante"; $P(x)$: "x se acerca a puerto"; $M(x)$: "x se marea":

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: elementos del dominio que son navegantes.
- **Propiedades de la selección**: los elementos seleccionados (algunos) se marean cuando se acercan a puerto:

$$\exists x\,(\underbrace{N(x)}_{\text{Selección}} \wedge (\underbrace{P(x) \to M(x)}_{\text{Propiedades de la selección}}))$$

Ejemplo 5

Formalizamos "Todo es gris y de aspecto descuidado" con $G(x)$: "x es gris" y $D(x)$: "x tiene el aspecto descuidado":

- **Sentido**: universal.
- **Selección**: todo el dominio (no se concreta de qué se habla).
- **Propiedades de la selección**: todos los elementos seleccionados (todo el dominio) son grises y de aspecto descuidado.

$$\forall x\,(\underbrace{G(x) \wedge D(x)}_{\text{Propiedades de la selección}})$$

Ejemplo 6

Formalizamos la proposición siguiente, "Hay quienes vuelan", con la asignación $V(x)$: "x vuela":

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: todo el dominio (no se concreta de qué se habla).
- **Propiedades de la selección**: de entre los elementos seleccionados (todo el dominio), hay quienes vuelan.

$$\exists x\ \underbrace{V(x)}_{\text{Propiedades de la selección}}$$

Observación

Como muestran los dos últimos ejemplos, es posible hacer referencia al dominio en su totalidad. En este caso, la parte de selección de la fórmula no estará.

Matices de significado

Observad el significado de las fórmulas siguientes ($P(x)$: "x es un programa"; $C(x)$: "x es caro"):

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow C(x))$: "Los programas (todos, en general) son caros". No se afirma la existencia de nada que sea un programa, ni de nada que sea caro.
- $\forall x\ (P(x) \wedge C(x))$: "Todo son programas y todo es caro (todo son programas caros)". Se afirma que en el dominio no hay otra cosa que programas caros. No es equivalente a la anterior. Es equivalente a $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ C(x)$.
- $\exists x\ (P(x) \wedge C(x))$: "Hay programas caros". Se afirma la existencia de, como mínimo, un programa caro.
- $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ C(x)$: "Hay un programa y hay algo que es caro". Sin embargo, el programa y lo que es caro no tienen por qué ser la misma cosa, de modo que no se afirma la existencia de ningún programa caro. No es equivalente a la anterior.
- $\exists x\ (P(x) \rightarrow C(x))$: "Hay algo que, si fuese un programa, sería caro". No se afirma la existencia de nada que sea un programa ni de nada que sea caro. No es equivalente a ninguna de las dos anteriores.

1.3.3. Formalización de frases complejas

Con frecuencia, para formalizar con el lenguaje de la lógica de predicados es conveniente reducir un problema complejo a una colección de problemas más simples, de manera parecida a como se hace en la formalización al lenguaje de la lógica de enunciados. Un buen ejemplo son aquellas frases que requieren el uso de más de un cuantificador para su formalización. Los ejemplos siguientes os ayudarán a verlo.

Ejemplo 1

Formalizar "Los programadores que tienen asignado un despacho rinden por encima de la media" con $P(x)$: "x es un programador"; $D(x)$: "x es un despacho"; $R(x)$: "x rinde por encima de la media"; $A(x,y)$: "x tiene y asignado" ("y está asignado a x").

- **Sentido**: universal.
- **Selección**: subconjunto de los programadores que tienen asignado un despacho.
- **Propiedades de la selección**: los elementos del subconjunto rinden por encima de la media.

Esquemáticamente la formalización será:

$$\forall x\ (P(x) \wedge \text{“}x \text{ tiene asignado un despacho”} \rightarrow R(x))$$

Ahora queda por resolver el problema de formalizar la frase "x tiene asignado un despacho". Para formalizarla, se procederá como hasta ahora: preguntarse

si su sentido es universal o existencial, preguntarse de qué habla (**selección**) y preguntarse qué afirma de aquello de lo que habla (**propiedades de la selección**). Dado que la respuesta a la pregunta "¿de qué habla la frase?" no puede ser "habla de x" (porque x ya está afectado por un cuantificador), leeremos la frase como "hay un despacho que está asignado a x".

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: subconjunto de despachos.
- **Propiedades de la selección**: los elementos de la selección (algunos) están asignados a x.

La **formalización** será: $\exists y\ (D(y) \wedge A(x,y))$. Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$\forall x\ (P(x) \wedge \exists y\ (D(y) \wedge A(x,y)) \rightarrow R(x))$$

Ejemplo 2

Formalizar "Hay excursionistas que conocen todas las rutas y que no han paseado por ningún bosque umbrío" con $E(x)$: "x es un excursionista"; $R(x)$: "x es una ruta"; $B(x)$: "x es un bosque umbrío"; $C(x,y)$: "x conoce y"; $P(x,y)$: "x pasea (ha paseado) por y".

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: subconjunto de los excursionistas.
- **Propiedades de la selección**: los elementos de la selección (algunos) conocen todas las rutas y nunca han paseado por ningún bosque umbrío.

Esquemáticamente:

$$\exists x\ (E(x) \wedge \text{“}x \text{ conoce todas las rutas”} \wedge$$
$$\wedge \text{“}x \text{ no ha paseado por ningún bosque umbrío”})$$

Para formalizar "x conoce todas las rutas", hacemos la lectura "Todas las rutas son conocidas por x" (se quiere evitar que la respuesta a la pregunta "¿de qué habla frase?" sea x, porque x ya está cuantificado) y obtenemos:

$$\forall y\ (R(y) \rightarrow C(x,y)).$$

La frase "x no ha paseado por ningún bosque umbrío" se formalizará como la negación de la frase "x ha paseado por algún bosque umbrío". De esta última frase, hacemos la lectura "hay algún bosque umbrío por el cual x ha paseado" y obtenemos la formalización $\exists z\ (B(z) \wedge P(x,z))$. La negación de esta fórmula es:

$$\neg\exists z\ (B(z) \wedge P(x,z))$$

Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$\exists x\ [E(x) \wedge \forall y\ (R(y) \rightarrow C(x,y)) \wedge \neg\exists z\ (B(z) \wedge P(x,z))]$$

Ejemplo 3

Formalizar "Cuando todos los conductores noveles respetan las señales, los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes" con $C(x)$: "x es un conductor novel"; $S(x)$: "x es una señal"; $R(x,y)$: "x respeta a y"; $A(x)$: "x es un agente"; $F(x,y)$: "x sanciona a y"; $I(x)$: "x es un infractor reincidente".

Globalmente, la frase expresa una condición suficiente porque:

- "Todos los conductores noveles respetan las señales" es la condición suficiente para:

- "Los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes"

En lo que respecta a la formalización de "Todos los conductores noveles respetan las señales":

- **Sentido**: universal.

- **Selección**: subconjunto de los conductores noveles.

- **Propiedades de la selección**: los elementos seleccionados respectan las señales.

Esquemáticamente:

$\forall x\ (C(x) \rightarrow$ "Las señales son respetadas por x").

La frase "Las señales son respetadas por x" tiene sentido universal (todas las señales, las señales en general), la selección es el subconjunto de las señales y de esta selección se dice que x la respeta: $\forall y\ (S(y) \rightarrow R(x,y))$. De este modo, la formalización del antecedente de la implicación es: $\forall x\ (C(x) \rightarrow \forall y\ (S(y) \rightarrow R(x,y)))$.

En lo que respecta a la formalización de la frase "Los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes":

- **Sentido**: universal (todos los agentes, los agentes en general).

Esquemáticamente:

$\forall x\ (A(x) \rightarrow$ "x sólo sanciona a infractores reincidentes").

La frase "x sólo sanciona a infractores reincidentes" expresa una condición necesaria porque:

– "Ser un infractor reincidente" es necesario para:

– "Ser sancionado por x".

La lectura "Todo lo que no es un infractor reincidente no es sancionado por x" nos lleva a la formalización: $\forall y\ (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))$, que equivale a $\forall y\ (F(x,y) \rightarrow I(y))$. De este modo, la formalización resultante es:

$$\forall x\ (A(x) \rightarrow \forall y\ (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))).$$

Y la formalización de toda la frase es:

$$\forall x\ [C(x) \rightarrow \forall y\ (S(y) \rightarrow R(x,y))] \rightarrow \forall x\ [A(x) \rightarrow \forall y\ (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))].$$

Ejemplo 4

Formalizamos "No hay ninguna persona que no conozca algún lugar habitado por mamíferos" con $P(x)$: "x es una persona"; $I(x)$: "x es un lugar"; $M(x)$: "x es un mamífero"; $H(x,y)$: "x habita y (y es habitado por x)"; $C(x,y)$: "x conoce y".

La frase que se quiere formalizar es la negación de "Hay personas que no conocen ningún lugar habitado por mamíferos". Para esta frase encontramos lo siguiente.

- **Sentido**: existencial.

- **Selección**: subconjunto de las personas.

- **Propiedades de la selección**: los (algunos) elementos de la selección no conocen ningún lugar habitado por mamíferos.

Esquemáticamente:

$$\exists x\ (P(x) \wedge \text{"}x \text{ no conoce ningún lugar habitado por mamíferos"}).$$

La frase "x no conoce ningún lugar habitado por mamíferos" es la negación de "x conoce algún lugar habitado por mamíferos", que podemos leer como "Hay lugares habitados por mamíferos que son conocidos por x". Para esta última frase:

- **Sentido**: existencial.
- **Selección**: el subconjunto de los lugares habitados por mamíferos.
- **Propiedades**: los elementos de la selección (algunos) son conocidos por x.

Esquemáticamente:

$$\exists y\ (I(y) \wedge \text{"}y \text{ es habitado por mamíferos"} \wedge C(x,y))$$

La frase “*y* es habitado por mamíferos” se formaliza como “Hay mamíferos que habitan *y*”: $\exists z\ (M(z) \wedge H(z,y))$. Finalmente, la formalización de la frase “*x* no conoce ...” será:

$$\neg\exists y\ [I(y) \wedge \exists z\ (M(z) \wedge H(z,y)) \wedge C(x,y)]$$

Con esto, la formalización de “No hay ninguna persona ...” será:

$$\neg\exists x\ \{P(x) \wedge \neg\exists y\ [I(y) \wedge \exists z\ (M(z) \wedge H(z,y)) \wedge C(x,y)]\}$$

Ejemplo 5

Formalizamos “Sólo si hubiese un inversor que tuviera todas las acciones emitidas por compañías solventes, ningún inversor compraría bonos emitidos por estados en vías de desarrollo” con $I(x)$: “*x* es un inversor”; $A(x)$: “*x* es una acción”; $S(x)$: “*x* es una compañía solvente”; $B(x)$: “*x* es un bono”; $D(x)$: “*x* es un estado en vías de desarrollo”; $E(x,y)$: “*x* emite *y*” (“*y* es emitido por *x*”); $T(x,y)$: “*x* tiene *y*” (“*x* es el propietario de *y*”); $C(x,y)$: “*x* compra *y*”.

Globalmente, la frase expresa una condición necesaria porque:

- “Hay un inversor que tiene todas las acciones emitidas por compañías solventes” es necesario para:
- “Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo”.

En lo que respecta a la formalización de “Hay un inversor que tiene todas las acciones emitidas por compañías solventes”, esquemáticamente es:

$$\exists x\ (I(x) \wedge \text{“Todas las acciones emitidas por compañías solventes son de } x\text{”})$$

Respecto a la formalización de “Todas las acciones emitidas por compañías solventes son de *x*”:

- **Sentido**: universal.
- **Selección**: acciones emitidas por compañías solventes.
- **Propiedades de la selección**: los elementos de la selección son propiedad de *x*.

Esquemáticamente:

$$\forall y\ (A(y) \wedge \text{“}y \text{ ha sido emitida por una compañía solvente”} \rightarrow T(x,y))$$

La formalización de "y ha sido emitida por una compañía solvente" es la de "Una compañía solvente ha emitido y": $\exists z\ (S(z) \wedge E(z,y))$.

La formalización de toda la frase "Hay un inversor..." es:

$$\exists x \{ I(x) \wedge \forall y\ [A(y) \wedge \exists z\ (S(z) \wedge E(z,y)) \rightarrow T(x,y)] \}$$

En lo que respecta a la formalización de "Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo", su formalización es la negación de la de "Algún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo".

Respecto a la formalización de "Algún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo", esquemáticamente es:

$\exists x\ (I(x) \wedge$ "x compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo")

La formalización de "x compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo" es la de "Hay bonos emitidos por estados en vías de desarrollo que son comprados por x". Esta formalización es:

$$\exists y\ (B(y) \wedge \exists z(D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y))$$

La formalización de toda la frase "Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo" es:

$$\neg\exists x \{ I(x) \wedge \exists y\ [B(y) \wedge \exists z\ (D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y)] \}$$

Y con esto, la formalización de toda la frase que expresa una condición necesaria es:

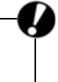
$$\neg\exists x \{ I(x) \wedge \exists y\ [B(y) \wedge \exists z\ (D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y)] \} \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists x \{ I(x) \wedge \forall y\ [A(y) \wedge \exists z(S(z) \wedge E(z,y)) \rightarrow T(x,y)] \}$$

2. La deducción natural

2.1. Reglas

La deducción natural de la lógica de predicados mantiene las nueve reglas de la lógica de enunciados y añade cuatro más: dos para cada cuantificador, una para eliminarlo y una para introducirlo.



Recordad que las nueve reglas de la deducción natural para enunciados se explican en el apartado 2 del módulo "Lógica de enunciados" de esta asignatura.

2.1.1. Eliminación e introducción de cuantificadores

a) Regla 10: eliminación del cuantificador universal (E∀)

Cuando una fórmula está cuantificada universalmente, la variable cuantificada puede ser sustituida por cualquier término y el cuantificador se puede eliminar:

$$\frac{\forall x\ A(x)}{A(t)}$$

Donde *t* es un término cualquiera (una constante o una variable, según convenga).

La regla **E**∀ puede ser entendida de la manera siguiente: si algo (A) puede decirse de todo el dominio ($\forall x\, A(x)$), entonces puede decirse de cualquiera de sus elementos ($A(t)$, donde t es un término cualquiera). Si se quiere decir de un elemento conocido o de un elemento al que se da un nombre, sustituiremos la variable cuantificada universalmente por la constante que designa este elemento (por ejemplo, $A(b)$). Si se quiere decir de un elemento cualquiera sin precisar más, la sustituiremos por una variable cualquiera (por ejemplo, $A(u)$).

Ejemplo de utilización correcta de la regla E∀

Como ejemplo de utilización correcta de esta regla, se validará el razonamiento:

"Los isleños son agradables. Juan es isleño. Luego, Juan es agradable."

Se hace la siguiente asignación de significados a predicados atómicos: $I(x)$: "x es isleño"; $A(x)$: "x es agradable"; a (constante): "Juan". El razonamiento se formaliza:

$$\forall x\ (I(x) \rightarrow A(x)),\ I(a)\ \therefore\ A(a)$$

(1)	$\forall x\ (I(x) \to A(x))$	**P**
(2)	$I(a)$	**P**
(3)	$I(a) \to A(a)$	**E**$\forall$ 1 (x sustituida por la constante a)
(4)	$A(a)$	**E**$\to$ 2, 3

Observad que en el paso 3 se pasa de "Todos los isleños son agradables" a "Si Juan es isleño, entonces es agradable". La constante a ha sido elegida para sustituir x porque cualquier otro término no habría permitido la eliminación de la implicación y la validación del razonamiento.

b) Regla 11: introducción del cuantificador universal (I∀)

Cuando se dispone de una fórmula que contiene una variable libre, esta variable puede cuantificarse universalmente:

$$\frac{A(u)}{\forall x\ A(x)}$$

Para que la aplicación de la regla sea correcta, son necesarias las condiciones siguientes:

Observación

Fijaos en que la regla **I**∀ va acompañada de condiciones que determinan la corrección de la aplicación.

a) La variable u debe ser arbitraria. Esto quiere decir que:

- Cuando se ha deducido $A(u)$, donde hay u, podría haberse puesto cualquier otro término.
- No aparece en el encabezamiento (hipótesis) de la subdeducción donde la regla se aplica.

b) La introducción del cuantificador universal no debe provocar capturas involuntarias de variables libres. Esto quiere decir que la variable x no aparece libre en la fórmula A.

c) Todas las ocurrencias de la variable libre u en la fórmula A deben ser sustituidas por x.

La regla **I**∀ puede ser entendida de la forma siguiente: si algo (A) puede decirse de u ($A(u)$) y se puede garantizar que este u podría ser cualquier objeto del dominio (exigencia de arbitrariedad), entonces A puede decirse de todos los elementos del dominio ($\forall x\ A(x)$).

Ejemplo de aplicación correcta de la regla I∀

Como ejemplo de utilización correcta de la regla se validará el razonamiento siguiente:

> "Todo el mundo es amigo de todo el mundo. Por lo tanto, todo el mundo es amigo de sí mismo".

El dominio será un conjunto cualquiera, no vacío, de personas, y se utilizará un solo predicado: $A(x,y)$: "*x* es amigo de *y*".

$$\forall x\ \forall y\ A(x,y)\ \therefore\ \forall z\ A(z,z)$$

(1)	$\forall x\ \forall y\ A(x,y)$	**P**
(2)	$\forall y\ A(u,y)$	**E**$\forall$ 1 (*x* es sustituida por *u*)
(3)	$A(u,u)$	**E**$\forall$ 2 (*y* es sustituida por *u*)
(4)	$\forall z\ A(z,z)$	**I**$\forall$ 3 (*u* era libre y arbitraria)

Ejemplos de aplicación incorrecta de la regla I∀

Lo siguiente son ejemplos de aplicaciones incorrectas de la regla **I**∀. En todos los casos se viola alguna de las condiciones que garantizan su uso correcto:

1) Deducción incorrecta porque la variable libre de la fórmula en que se aplica la regla aparece en el encabezamiento de la subdeducción donde se hace la aplicación.

(1)	$\forall x\ (S(x) \vee P(x))$		**P**
(2)	$\neg\forall x\ S(x)$		**P**
(3)	$S(u) \vee P(u)$		**E**$\forall$ 1
(4)		$S(u)$	**H**
(5)		$\forall x\ S(x)$	**I**$\forall$ 4 ¡error!
(6)		$\neg\forall x\ S(x)$	**it** 2
(7)	$\neg S(u)$		**I**$\neg$ 4, 5, 6
(8)	$P(u)$		**SD** 3, 7
(9)	$\forall x\ P(x)$		**I**$\forall$ 8

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

> "Los números enteros son pares o impares. No todos los números enteros son impares. En consecuencia, todos los números enteros son pares."

2) Esta deducción es incorrecta porque no todas las apariciones de la variable libre se han sustituido en el momento de la introducción del cuantificador:

(1)	$\forall x\ P(x,x)$	**P**
(2)	$P(u,u)$	**E**$\forall$ 1
(3)	$\forall y\ P(u,y)$	**I**$\forall$ 2 ¡error! Lo correcto hubiera sido $\forall y\ P(y,y)$
(4)	$\forall x\ \forall y\ P(x,y)$	

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

"Todo el mundo habla consigo mismo. Así pues, todo el mundo habla con todo el mundo."

3) Ejemplo de captura involuntaria de una variable libre: se dispone de la fórmula $A(u) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(u,x))$ donde u es una variable libre y arbitraria. Se elige x para sustituir u e introducir el cuantificador universal y se obtiene $\forall x\ (A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x,x)))$. Huelga decir que cualquier otro nombre para la variable haría correcta la introducción del cuantificador. Por ejemplo: $\forall y\ (A(y) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(y,x)))$.

c) Regla 12: eliminación del cuantificador existencial (E∃)

Cuando una fórmula está cuantificada existencialmente, la variable cuantificada puede ser sustituida por una constante nueva y el cuantificador se puede eliminar:

$$\frac{\exists x\ A(x)}{A(a)}$$

Para que la aplicación de la regla sea correcta, es necesario garantizar que la constante utilizada es nueva, es decir, que no haya aparecido nunca antes.

La regla **E∃** puede entenderse de la forma siguiente: si se sabe que hay un elemento del dominio que cumple una determinada propiedad (A), nos podemos referir al mismo con una constante (a), siempre y cuando la misma constante no se utilice también para referirse a cualquier otro elemento del dominio.

La regla original de eliminación del cuantificador existencial

La regla de eliminación del cuantificador existencial que acabamos de ver no es la que habitualmente se considera. La regla original es la siguiente:

$\exists x\ A(x)$
| $A(a)$
| ...
| B
B

Para aplicarla correctamente es necesario que la constante a no aparezca ni en la fórmula A ni en la fórmula B, así como tampoco en ninguna hipótesis de ninguna subdeducción que todavía esté abierta.

La regla de eliminación del cuantificador existencial que se estudia en este módulo es equivalente a la original, pero más simple e intuitiva.

Ejemplo de aplicación correcta de la regla E∃

Como ejemplo de aplicación correcta de la regla **E∃** se validará el razonamiento siguiente:

> "Si todos los programas han sido verificados, todos los resultados son correctos. Sin embargo, hay un resultado que no es correcto. Esto quiere decir que no todos los programas han sido verificados."

Se utilizará los predicados atómicos: $P(x)$: "x es un programa"; $V(x)$: "x ha sido verificado"; $R(x)$: "x es un resultado"; $C(x)$: "x es correcto".

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow \forall y\ (R(y) \rightarrow C(y)),\ \exists x\ (R(x) \wedge \neg C(x))\ \therefore\ \neg\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x))$$

(1)	$\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow \forall y\ (R(y) \rightarrow C(y))$		**P**
(2)	$\exists x\ (R(x) \wedge \neg C(x))$		**P**
(3)		$\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x))$	**H**
(4)		$\forall y\ (R(y) \rightarrow C(y))$	E→ 1, 3
(5)		$R(a) \wedge \neg C(a)$	E∃ 2
(6)		$R(a) \rightarrow C(a)$	E∀ 4
(7)		$R(a)$	E∧ 5
(8)		$C(a)$	E→ 6, 7
(9)		$\neg C(a)$	E∧ 5
(10)	$\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow V(x))$		I¬ 3, 8, 9

La línea 6

La línea 6 de esta demostración es correcta. Para aplicar la regla **E∃** es necesario utilizar una constante nueva, pero esta restricción no se aplica a la regla **E∀** donde puede utilizarse cualquier término.

Ejemplo de aplicación incorrecta de la regla E∃

La regla **E∃** se aplica mal cuando se utiliza una constante que ya ha sido utilizada antes, ya sea en alguna de las premisas o en una aplicación anterior de esta misma regla o de la regla **E∀**:

(1)	$\forall x\ [C(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \wedge P(x,y))]$	**P**
(2)	$C(a)$	**P**
(3)	$C(a) \rightarrow \exists y\ (B(y) \wedge P(a,y))$	E∀ 1
(4)	$\exists y\ (B(y) \wedge P(a,y))$	E→ 2, 3
(5)	$B(a) \wedge P(a,a)$	E∃ 4 ¡error! Lo correcto habría sido $B(b) \wedge P(a,b)$
(6)	$B(a)$	E∧ 5

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

> "Todos los *cow-boys* llevan sombrero. Johny es un *cow-boy*. En consecuencia, Johny es un sombrero."

d) Regla 13: introducción del cuantificador existencial (I∃)

Las variables libres de una fórmula se puede cuantificar existencialmente. Las constantes de una fórmula pueden sustituirse por una variable cuantificada existencialmente:

$$\frac{A(t)}{\exists x\ A(x)}$$

Donde *t* es un término cualquiera (si se trata de una variable, debe ser libre).

La regla **I∃** puede entenderse de la forma siguiente: si algo (A) puede decirse de t ($A(t)$), entonces existe un elemento del dominio del cual puede decirse A ($\exists x\ A(x)$).

Ejemplo de aplicación correcta de la regla I∃

Como ejemplo de utilización correcta de la regla, se validará el razonamiento siguiente:

> "Todos los bancos tienen ordenadores. Hay bancos. En consecuencia, hay ordenadores".

Se utilizarán los predicados siguientes: $B(x)$: "x es un banco"; $O(x)$: "x es un ordenador"; $T(x,y)$: "x tiene y".

$$\forall x\ [B(x) \to \exists y\ (O(y) \land T(x,y))],\ \exists x\ B(x)\ \therefore\ \exists x\ O(x)$$

(1)	$\forall x\ [B(x) \to \exists y\ (O(y) \land T(x,y))]$	**P**
(2)	$\exists x\ B(x)$	**P**
(3)	$B(a)$	**E∃** 2
(4)	$B(a) \to \exists y\ (O(y) \land T(a,y))$	**E∀** 1
(5)	$\exists y\ (O(y) \land T(a,y))$	**E→** 3, 4
(6)	$O(b) \land T(a,b)$	**E∃** 5
(7)	$O(b)$	**E∧** 6
(8)	$\exists x\ O(x)$	**I∃** 7

2.1.2. Restricciones adicionales

Como hemos visto, algunas de las reglas referidas a cuantificadores van acompañadas de restricciones que hay que tener en cuenta para garantizar que se apliquen correctamente. A continuación se presentan dos más, una que afecta a la introducción del cuantificador universal y otra que restringe el uso que puede hacerse de las constantes introducidas al eliminar cuantificadores existenciales:

1) Cuando una fórmula contiene a la vez:

- Una variable libre (u) que proviene de la eliminación de un cuantificador universal, y

- Una constante (a) que proviene de la eliminación de un cuantificador existencial que estaba dentro del alcance del cuantificador universal anterior (aquél cuya eliminación ha dado lugar a la aparición de la variable u),

entonces: no solo se puede aplicar la regla I∀ respecto a la variable libre u.

Por ejemplo, de la fórmula $\forall x\ \exists y\ C(x,y)$ no se puede deducir la fórmula $\exists y\ \forall x\ C(x,y)$. Observad que el cuantificador existencial se halla dentro del alcance del universal.

(1)	$\forall x\ \exists y\ C(x,y)$	**P**	
(2)	$\exists y\ C(u,y)$	**E**∀ 1	
(3)	$C(u,a)$	**E**∃ 2	
(4)	$\forall x\ C(x,a)$	**I**∀ 3	¡error! a proviene de un ∃ que estaba dentro del alcance del ∀ del cual proviene u.
(5)	$\exists y\ \forall x\ C(x,y)$	**I**∃ 4	

Si se otorga a $C(x,y)$ el significado "x conoce y", la deducción anterior da por válido, incorrectamente, el razonamiento siguiente:

> "Todo el mundo conoce a alguien. Por lo tanto, hay alguien que conoce a todo el mundo."

Sin embargo, no hay ningún problema si el cuantificador existencial no se halla dentro del alcance del universal. De la fórmula $\forall x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$, sí que puede deducirse la fórmula $\exists y\ \forall x\ (P(x) \wedge Q(y))$.

(1)	$\forall x\ P(x) \wedge \exists y\ Q(y)$	**P**
(2)	$\forall x\ P(x)$	**E**∧ 1
(3)	$\exists y\ Q(y)$	**E**∧ 1
(4)	$P(u)$	**E**∀ 2
(5)	$Q(a)$	**E**∃ 3
(6)	$P(u) \wedge Q(a)$	**I**∧ 4, 5
(7)	$\forall x\ (P(x) \wedge Q(a))$	**I**∀ 6
(8)	$\exists y\ \forall x\ (P(x) \wedge Q(y))$	**I**∃ 7

2) Las constantes introducidas al aplicar la regla **E**∃ son locales en la (sub)deducción que las ha originado y sólo pueden ser utilizadas en el mismo nivel o en niveles más interiores, pero no pueden subir a niveles superiores.

Un ejemplo de demostración que es incorrecta porque viola esta restricción es el siguiente:

(1)	$\forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, R(y)$		**P**
(2)		$\forall x\, P(x)$	**H**
(3)		$\exists y\, R(y)$	**E**$\rightarrow$ 1, 2
(4)		$R(a)$	**E**$\exists$ 3
(5)	$\forall x\, P(x) \rightarrow R(a)$		**I**$\rightarrow$ 2, 4 ¡error! (*a* no puede salir de la subdeducción donde ha sido introducida).

2.2. Ejemplos

A continuación exponemos dos ejemplos de aplicación de las reglas de deducción natural:

1) Demostramos la validez del razonamiento siguiente:

$$\forall x\, \forall y\, [P(x) \rightarrow R(x, y)],\ \exists x\, \exists y\, [Q(y) \wedge \neg R(x, y)],\ \forall x\, \exists y\, [P(x) \vee S(x, y)]\ \therefore\ \exists x\, \exists y\, S(x, y).$$

(1) $\forall x\, \forall y\, [P(x) \rightarrow R(x,y)]$	**P**
(2) $\exists x\, \exists y\, [Q(y) \wedge \neg R(x,y)]$	**P**
(3) $\forall x\, \exists y\, [P(x) \vee S(x,y)]$	**P**
(4) $\exists y\, [Q(y) \wedge \neg R(a,y)]$	**E**$\exists$ 2, *x* sustituida por *a**.
(5) $Q(b) \wedge \neg R(a,b)$	**E**$\exists$ 4, *y* sustituida por *b**.
(6) $\forall y\, (P(a) \rightarrow R(a,y))$	**E**$\forall$ 1, *x* sustituida por *a*.
(7) $P(a) \rightarrow R(a,b)$	**E**$\forall$ 6, *y* sustituida por *b*.
(8) $\neg R(a,b)$	**E**$\wedge$ 5
(9) $\neg P(a)$	**MT** 7, 8
(10) $\exists y\, [P(a) \vee S(a,y)]$	**E**$\forall$ 3, *x* sustituida por *a*.
(11) $P(a) \vee S(a,c)$	**E**$\exists$ 10, *y* sustituida por *c**.
(12) $S(a,c)$	**SD** 9, 11
(13) $\exists y\, S(a,y)$	**I**$\exists$ 12
(14) $\exists x\, \exists y\, S(x,y)$	**I**$\exists$ 13

* Todas estas constantes son constantes nuevas.

2) Demostramos la validez del razonamiento siguiente:

$$\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)],\ \forall y\, [P(y) \wedge R(y)]\ \therefore\ \forall x\, [R(x) \wedge Q(x)].$$

(1) $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$	**P**
(2) $\forall y\, [P(y) \wedge R(y)]$	**P**
(3) $P(w) \rightarrow Q(w)$	**E**$\forall$ 1, *w* es arbitraria*.
(4) $P(w) \wedge R(w)$	**E**$\forall$ 2, *w* es arbitraria*.
(5) $P(w)$	**E**$\wedge$ 4
(6) $R(w)$	**E**$\wedge$ 4
(7) $Q(w)$	**E** $\rightarrow$ 3, 5
(8) $R(w) \wedge Q(w)$	**I**$\wedge$ 6, 7
(9) $\forall x\, [R(x) \wedge Q(x)]$	**I**$\forall$ 8, *w* era una variable arbitraria.

* En este caso *w* podría ser cualquier otro término.

2.3. Reglas derivadas y equivalencias deductivas

En la lógica de predicados, la deducción natural es bastante más compleja que en la lógica de enunciados, y la posibilidad de cometer errores también es mayor. Para reducir tanto como sea posible el riesgo de errores, es interesante utilizar, siempre que sea factible, **reglas derivadas** y **equivalencias deductivas** de corrección probada. Las que se exponen a continuación son algunas de las más útiles y las que se utilizan con más frecuencia: !

1) Cambio de nombre de la variable cuantificada:

- $\forall x\, A(x) \dashv\vdash \forall y\, A(y)$.
- $\exists x\, A(x) \dashv\vdash \exists y\, A(y)$.

2) Paso del cuantificador universal al existencial:

$$\frac{\forall x\, A(x)}{\exists x\, A(x)}$$

3) Conmutatividad de los cuantificadores:

- $\forall x\, \forall y\, A(x,y) \dashv\vdash \forall y\, \forall x\, A(x,y)$.
- $\exists x\, \exists y\, A(x,y) \dashv\vdash \exists y\, \exists x\, A(x,y)$.

4) Relación de los cuantificadores con la negación, **leyes de De Morgan**:

$$\neg\forall x\, A(x) \dashv\vdash \exists x\, \neg A(x)$$

$$\neg\exists x\, A(x) \dashv\vdash \forall x\, \neg A(x)$$

Estas leyes también ponen de manifiesto la relación que tienen los cuantificadores entre sí.

5) Relación de los cuantificadores con la conjunción:

a) Para el caso del cuantificador universal, tenemos lo siguiente:

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall y\, B(y) \dashv\vdash \forall z\, (A(z) \wedge B(z)).$$

b) Para el caso del cuantificador existencial no se da la equivalencia y sólo tenemos:

$$\frac{\exists z\, (A(z) \wedge B(z))}{\exists x\, A(x) \wedge \exists y\, B(y)}$$

6) Relación de los cuantificadores con la disyunción:

a) Para el caso del cuantificador existencial, tenemos lo siguiente:

$$\exists x\ A(x) \vee \exists y\ B(y) \dashv \vdash \exists z\ (A(z) \vee B(z)).$$

b) Para el caso del cuantificador universal no se da la equivalencia, y sólo tenemos:

$$\frac{\forall x\ A(x) \vee \forall y\ B(y)}{\forall z\ (A(z) \vee B(z))}$$

7) Relación de los cuantificadores con la implicación:

a) En el caso de los cuantificadores universales, la relación es la siguiente:

$$\frac{\forall z\ (A(z) \to B(z))}{\forall x\ A(x) \to \forall y\ B(y)}$$

b) En cambio, para el cuantificador existencial, tenemos:

$$\frac{\exists x\ A(x) \to \exists y\ B(y)}{\exists z\ (A(z) \to B(z))}$$

3. Verdad y falsedad en la lógica de predicados

3.1. El concepto de interpretación en la lógica de predicados

Todo lo que explicamos sobre la indiferencia de la lógica respecto al significado de los enunciados se puede extender a la lógica de predicados y, concretamente, a las fórmulas. La lógica de predicados también asume que cualquier fórmula puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas simultáneamente, y garantiza que, si un razonamiento es correcto, entonces, siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión también lo será.



Consultad el apartado 3 del módulo "Lógica de enunciados".

No obstante, una fórmula es algo más complejo que un enunciado. La definición de interpretación debe tener en cuenta esta mayor complejidad.

Recordad que...

... en la lógica de enunciados, una interpretación se definió como una asignación de valor de verdad a cada uno de los átomos de un enunciado.

Con una **interpretación** se asigna un valor de verdad a una fórmula. Hay tres aspectos que condicionan el valor de verdad de una fórmula: el dominio considerado, el valor de verdad de los predicados cuando las variables son sustituidas por los elementos del dominio y el significado de las constantes (qué elemento del dominio designan). De este modo, para construir una interpretación es necesario explicitar los aspectos siguientes:

1) El dominio (D) de las variables, que no puede estar vacío ($\varnothing$).

2) Para cada símbolo de predicado, una interpretación (V o F) para cada una de las posibles sustituciones de todas sus variable por elementos del dominio. El conjunto de todas estas interpretaciones se denomina *Ip*.

3) Para cada símbolo de constante, una asignación de un elemento concreto del dominio. El conjunto de todas estas asignaciones se denomina *Ic*.

Una interpretación en lógica de predicados es, pues, un triplete de la forma <D, *Ip*, *Ic*>.

Ejemplos de construcción de una interpretación

1) Consideremos la fórmula $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ y veamos cómo se puede construir una interpretación de la misma:

Para construir una interpretación...

... se consideran todas las sustituciones de variables por elementos del dominio, mientras que sólo se considera una sustitución por cada constante. Una constante designa un elemento, y sólo uno, del dominio.

- Como dominio se toma un conjunto de dos elementos, que se identifican con los números 1 y 2, $D = \{1, 2\}$.

- Todas las posibles sustituciones que se pueden hacer de las variables del predicado P por elementos del dominio dan lugar a $P(1,1)$, $P(1,2)$, $P(2,1)$ y $P(2,2)$. Una posible interpretación de estas sustituciones en el predicado P puede ser $P(1,1)$ = V, $P(1,2)$ = F, $P(2,1)$ = V y $P(2,2)$ = F.

- Dado que en la fórmula no hay constantes, no se pueden hacer asignaciones a elementos concretos del dominio.

Así pues, finalmente, la interpretación ha quedado del modo que exponemos a continuación:

$$<\{1, 2\}, \{P(1,1) = V, P(1,2) = F, P(2,1) = V, P(2,2) = F\}, \varnothing>.$$

Fijaos en que, una vez sustituidos los parámetros por valores concretos del dominio, los predicados ya se pueden interpretar como V o F, del mismo modo que los enunciados. La explicación es simple: recordad que un predicado en el que se han sustituido todos los parámetros por elementos concretos del dominio es un enunciado.

Solamente teniendo en cuenta que el número de posibles dominios es infinito ({ 1 }, { 1, 2 },{ 1, 2, 3 }...) ya se puede ver que el número de interpretaciones de una fórmula también es infinito. Esto no sucede en el caso de los enunciados, porque un enunciado con n átomos tiene, exactamente, $2n$ interpretaciones.

2) Para la fórmula $\exists z\ Q(z,a)$, una interpretación sería la siguiente:

- El dominio es $D = \{ 1, 2 \}$.

- Todas las sustituciones que se pueden hacer de las variables del predicado Q dan lugar a $Q(1,1)$, $Q(1,2)$, $Q(2,1)$ y $Q(2,2)$, y una posible interpretación de todas estas sustituciones puede ser $Q(1,1) = F$, $Q(1,2) = V$, $Q(2,1) = V$ y $Q(2,2) = F$.

- A la constante a se le debe asignar un elemento del dominio. Una posible asignación es $a = 2$.

Así pues, finalmente, la interpretación ha quedado de la manera que presentamos a continuación:

$$<\{ 1, 2 \}, \{ Q(1,1) = F, Q(1,2) = V, Q(2,1) = V, Q(2,2) = F \}, \{ a = 2 \}>.$$

3.2. Paso de fórmulas a enunciados

Acabamos de ver qué se entiende por interpretación en la lógica de predicados. Ahora es necesario ver cómo se debe determinar el valor de verdad de una fórmula, a partir de los valores de verdad asignados a los enunciados* y de la asignación de elementos concretos a las constantes.

*** Resultantes de sustituir las variables de los predicados por elementos del dominio.**

Se debe tener en cuenta que, si el dominio a partir del cual se hace la interpretación tiene n elementos (D = { 1, 2, ..., n }), entonces:

1) Toda fórmula del tipo $\forall x\ p(x)$ es equivalente al enunciado:

$$P(1) \wedge ... \wedge P(n).$$

2) Toda fórmula del tipo $\exists x\ P(x)$ es equivalente al enunciado:

$$P(1) \vee ... \vee P(n).$$

Ejemplos de equivalencia entre enunciados y fórmulas

Si D = { 1, 2, 3 }, entonces:

1) la fórmula $\forall x\ P(x)$ es equivalente al enunciado $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$;

2) la fórmula $\exists y\ [Q(y) \rightarrow R(y)]$ es equivalente al enunciado siguiente:

$$(Q(1) \rightarrow R(1)) \vee (Q(2) \rightarrow R(2)) \vee (Q(3) \rightarrow R(3));$$

3) la fórmula $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ es equivalente a $\exists y\ P(1,y) \wedge \exists y\ P(2,y) \wedge \exists y\ P(3,y)$ y ésta lo es al enunciado siguiente:

$$[P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)] \wedge [P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)] \wedge [P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)].$$

Para determinar el valor de verdad de una fórmula, dada una interpretación en concreto, sólo hay que convertirla en un enunciado, siguiendo las dos reglas que acabamos de describir, y proceder de la misma forma como lo hacemos para cualquier otro enunciado.

Ejemplos de determinación del valor de verdad de una fórmula

Dadas la fórmula $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ y la interpretación <{ 1, 2 }, { $P(1,1)$ = V, $P(1,2)$ = F, $P(2,1)$ = V, $P(2,2)$ = F }, ∅>, tenemos que en el dominio D = { 1, 2 } la fórmula es equivalente al enunciado $[P(1,1) \vee P(1,2)] \wedge [P(2,1) \vee P(2,2)]$. Finalmente, sólo hay que proceder como si se calculase una única fila de una tabla de verdad, como mostramos a continuación:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$	$P(1,1) \vee P(1,2)$	$P(2,1) \vee P(2,2)$	$\boldsymbol{\forall x\ \exists y\ P(x,y)}$
V	F	V	F	V	V	**V**

De la misma manera, para la fórmula $\exists x\ Q(z, a)$ y la interpretación <{ 1, 2 }, { $Q(1,1)$ = F, $Q(1,2)$ = V, $Q(2,1)$ = V, $Q(2,2)$ = F }, { a = 2 }>, tendríamos que $\exists z\ Q(z,a)$ es equivalente a $Q(1,a) \vee Q(2,a)$ y, dado que sería lo mismo que $Q(1,2) \vee Q(2,2)$, quedaría la tabla siguiente:

$Q(1,a) = Q(1,2)$	$Q(2,a) = Q(2,2)$	$\boldsymbol{\exists z\ Q(z,a) = Q(1,2) \vee Q(2,2)}$ **(con $\boldsymbol{a = 2}$)**
V	F	**V**

Volviendo a la fórmula $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$, la tabla de verdad para todas las interpretaciones donde el dominio es $D = \{ 1, 2 \}$ sería la que presentamos a continuación; resulta sencillo darse cuenta de que es posible construir la tabla de verdad para todas las interpretaciones que tienen un mismo dominio.

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$	$P(1,1) \vee P(1,2)$	$P(2,1) \vee P(2,2)$	$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$
V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	V	F	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	**V**
V	V	F	F	V	F	**F**
V	F	V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	F	**F**
F	F	V	V	F	V	**F**
F	F	V	F	F	V	**F**
F	F	F	V	F	V	**F**
F	F	F	F	F	F	**F**

Los conceptos de tautología y antinomia que se aplican a los enunciados también se pueden aplicar a las fórmulas.

Recordad los conceptos de antinomia y de tautología que hemos visto en el subapartado 3.3. del módulo "Lógica de enunciados".

Dependiendo del **valor de verdad** de una fórmula, tenemos que:

a) Una fórmula es una **tautología** cuando su valor de verdad es V en todas las posibles interpretaciones.

b) Una fórmula es una **antinomia** cuando su valor de verdad es F en todas las posibles interpretaciones.

c) Cuando una fórmula ni es una tautología ni es una contradicción, se dice que es **contingente**.

Observación

Por 'en todas las posibles interpretaciones' entendemos 'para cualquier dominio', 'para cualquier combinación de atribución de valores de verdad a las posibles sustituciones' y 'para cualquier asignación de elementos del dominio a constantes'.

Una fórmula es una tautología si, y sólo si, es un teorema, y es una antinomia si, y sólo si, es una contradicción.

3.3. Refutación de razonamientos

Como en el caso de la lógica de enunciados, un razonamiento es correcto si, y sólo si, todas aquellas interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión.

La infinidad en el número de interpretaciones no permite validar un razonamiento por la vía de comprobar que todas las interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión. A pesar de esta adversidad, sí que es posible utilizar esta vía para demostrar que un razonamiento es formalmente inválido.

Un razonamiento es formalmente inválido cuando existe una interpretación, como mínimo, que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión. Estas interpretaciones se denominan, como en el caso de la lógica de enunciados, **contraejemplos**.

El **proceso para buscar un contraejemplo**, que invalide un razonamiento es el siguiente:

1) Se comienza con el menor dominio posible ($D = \{ 1 \}$) y todas las interpretaciones que se puedan construir con éste. Si alguna de éstas hace verdaderas las premisas pero no la conclusión, ya se ha encontrado el contraejemplo que se buscaba.

2) Se repite el proceso añadiendo cada vez un elemento más al dominio. El proceso se para cuando se encuentra un contraejemplo.

Si el razonamiento es inválido, se acabará encontrando el contraejemplo que se buscaba. Contrariamente, si el razonamiento es correcto, el proceso continuará indefinidamente*, cada vez con dominios de más elementos, sin encontrar nada. Esto hace que el procedimiento se tenga que reservar para encontrar contraejemplos de razonamientos que se saben inválidos o de los cuales se tienen sospechas fundadas de invalidez.

* Si el razonamiento es correcto, el proceso se convierte en una iteración infinita.

Ejemplo de cómo hay que buscar un contraejemplo

Demostramos la invalidez del razonamiento $\exists x\ P(x)\ \therefore\ \forall z\ P(z)$

- Cuando tenemos el dominio $D = \{ 1 \}$. Sustituyendo todas las variables del predicado P por elementos del dominio, se obtiene $P(1)$. La fórmula $\exists x\ P(x)$ es equivalente a $P(1)$, y $\forall z\ P(z)$ es equivalente a $P(1)$. Entonces, obtenemos la siguiente tabla de verdad:

$P(1)$	$\exists x\ P(x)$	$\forall x\ P(x)$
V	V	V
F	F	F

Todas las interpretaciones que hacen verdadera la premisa también hacen verdadera la conclusión. En este dominio, pues, no hemos encontrado ningún contraejemplo.

- Cuando tenemos el dominio $D = \{ 1, 2 \}$, las sustituciones dan lugar a $P(1)$ y $P(2)$. La premisa es equivalente a $P(1) \vee P(2)$, y la conclusión es equivalente a $P(1) \wedge P(2)$. Así, tenemos la siguiente tabla de verdad:

$P(1)$	$P(2)$	$P(1) \vee P(2) = \exists x\, P(x)$	$P(1) \wedge P(2) = \forall x\, P(x)$	
V	V	V	V	
V	**F**	**V**	**F**	Contraejemplos
F	**V**	**V**	**F**	Contraejemplos
F	F	F	F	

En este dominio sí se han encontrado contraejemplos. En concreto, se ha encontrado que las interpretaciones $<\{ 1, 2 \}, \{P(1) = V, P(2) = F \}, \varnothing>$ y $<\{ 1, 2 \}, \{P(1) = F, P(2) = V \}, \varnothing>$ hacen verdadera la premisa, pero no la conclusión. Se acaba de demostrar que el razonamiento es inválido y ya no es necesario continuar buscando en dominios de más elementos.

4. Formas normales

4.1. Forma normal de Skolem

Las fórmulas, igual que los enunciados, se manipulan algebraicamente para obtener fórmulas equivalentes. La transformación algebraica de una fórmula tiene por objetivo la consecución de una forma normal.

> La forma normal de una fórmula recibe el nombre de **forma normal prenexa**. Una fórmula estará expresada en forma normal prenexa si, y sólo si, presenta la siguiente estructura:
>
> $$\underbrace{Q_1x_1 \ldots Q_nx_n}_{\textbf{Prefijo}} \underbrace{(\text{expressión sin cuantificadores})}_{\textbf{Matriz}},$$
>
> donde los Q_i son cuantificadores.

Es decir, una fórmula estará expresada en forma normal prenexa cuando todos los cuantificadores están agrupados a su izquierda (la parte denominada **prefijo**) y, consecuentemente, no aparece ningún cuantificador a su derecha (la parte denominada **matriz**).

> La forma normal denominada **forma normal de Skolem** (FNS) es la que se utiliza para poder aplicar, posteriormente, el método de resolución. Es una forma normal prenexa, con la matriz normalizada (FNC) y con un prefijo que sólo contiene cuantificadores universales. Los cuantificadores existenciales se eliminan siguiendo un proceso denominado **eskolemización**.

Para **encontrar la forma normal de Skolem** de cualquier fórmula, se siguen los pasos siguientes:

1) Verificar que no existen variables libres. Si existen variables libres, esto es un síntoma de error en la formalización y es necesario repasarla. Si la fórmula se ha dado con variables libres, éstas se deben cuantificar existencialmente. Los cuantificadores existenciales que se añadan deberán colocarse a la izquierda del todo de la fórmula.

2) Opcionalmente, si se utiliza el mismo nombre para variables dentro del ámbito de cuantificadores distintos, puede ser útil cambiar estos nombres.

3) Eliminar todas las apariciones de la conectiva $\to$ ($A \to B \dashv\vdash \neg A \vee B$).

4) Aplicar las leyes de De Morgan para conseguir que las negaciones precedan a los símbolos de predicado. Será necesario aplicar tanto las leyes de De Morgan estudiadas para los enunciados como las que se aplican a las fórmulas cuantificadas.

5) Eliminar los cuantificadores existenciales (eskolemización).

6) Mover todos los cuantificadores* hacia la izquierda.

*** Sólo habrá cuantificadores universales.**

7) Normalizar la matriz. Para poder aplicar el método de resolución, es necesario que esté expresada en forma normal conjuntiva.

Los pasos de este proceso se deben seguir en el orden indicado. Alterar su orden podría provocar errores.

4.2. Eliminación de cuantificadores existenciales: eskolemización

El punto principal para encontrar la forma normal de Skolem de una fórmula es la eliminación de los cuantificadores existenciales. Para llevarla a cabo, procederemos de la siguiente manera:

1) Si un cuantificador existencial no se encuentra dentro del ámbito de ningún cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una constante que todavía no ha sido utilizada, y eliminar el cuantificador existencial. La constante no se podrá utilizar posteriormente.

2) Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de un cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una función de la variable cuantificada universalmente, y eliminar el cuantificador existencial. La función no se puede haber utilizado previamente ni se podrá utilizar posteriormente.

3) Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de más de un cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una función de todas las variables afectadas por estos cuantificadores universales y eliminar el cuantificador existencial. La función no se puede haber utilizado previamente ni se podrá utilizar posteriormente.

Los cuantificadores universales afectan a las variables cuantificadas existencialmente que están dentro de su ámbito, pero no afectan a las otras variables cuantificadas universalmente.

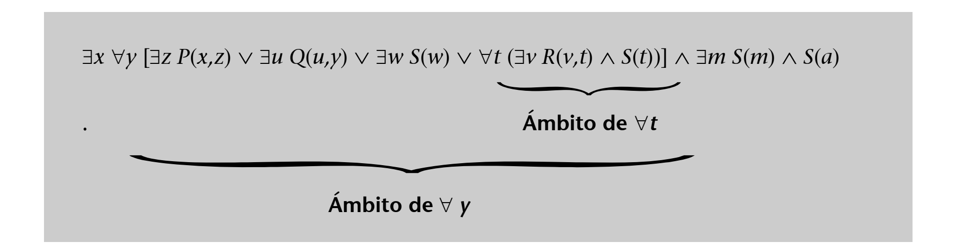
Los cuantificadores existenciales no afectan ni a las variables cuantificadas universalmente ni a ninguna otra variable cuantificada existencialmente.

Ejemplo de eskolemización

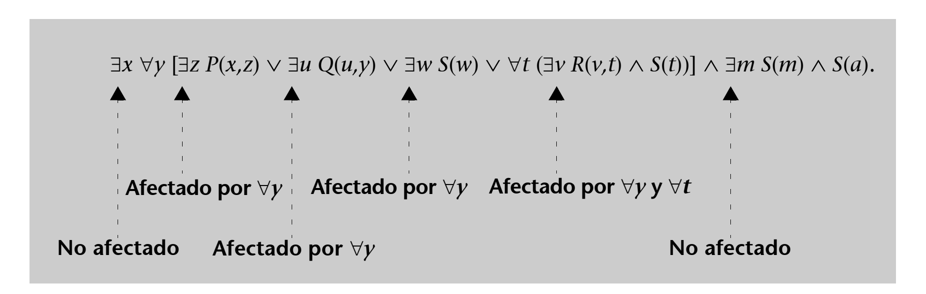
Como ejemplo de eskolemización, aplicamos el proceso de eliminación de cuantificadores existenciales en la fórmula siguiente:

$$\exists x\ \forall y\ [\exists z\ P(x,z) \lor \exists u\ Q(u,y) \lor \exists w\ S(w) \lor \forall t\ (\exists v\ R(v,t) \land S(t))] \land \exists m\ S(m) \land S(a).$$

El primer paso es la detección de los cuantificadores universales y sus ámbitos, como mostramos a continuación:



Ahora ya podemos determinar cuáles son los cuantificadores universales que afectan a cada cuantificador existencial:



Con esta información podemos decir qué variables deben ser sustituidas y por qué constante o función lo deben ser:

La variable x será sustituida por la constante b (a no se puede utilizar porque ya aparece en la fórmula).

- La variable z será sustituida por la función $f(y)$.
- La variable u será sustituida por la función $g(y)$.
- La variable w será sustituida por la función $k(y)$.
- La variable v será sustituida por la función $h(y,t)$.
- La variable m será sustituida por la constante c (b no se puede utilizar porque ya se ha utilizado antes, igual que a).

Nota

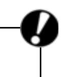
$f(y)$, $g(y)$, $k(y)$ y $h(y,t)$ son funciones nuevas cualesquiera.

Para acabar, sólo hay que hacer las sustituciones y eliminar los cuantificadores existenciales, y obtenemos lo que presentamos a continuación:

$\forall y\ [P(\mathbf{b},\mathbf{f(y)}) \lor Q(\mathbf{g(y)},y) \lor S(\mathbf{k(y)}) \lor \forall t\ (R(\mathbf{h(y,t)},t) \land S(t))] \land S(\mathbf{c}) \land S(a)$.*

* En negrita hemos indicado los cambios que se han producido.

Las funciones utilizadas para eliminar los cuantificadores existenciales afectados por cuantificadores universales reciben el nombre de **funciones de Skolem** y se deben considerar términos. Como las constantes, no se pueden cuantificar.



Recordad el concepto *término* visto en el subapartado 1.2.1 de este módulo didáctico.

Las funciones de Skolem ponen en evidencia las relaciones funcionales que existen entre las variables cuantificadas existencialmente y las cuantificadas universalmente.

Un ejemplo os ayudará a entender este hecho. Supongamos que utilizamos el predicado $Q(x,y)$, "el cuadrado del número x es el número y", para formalizar la frase "Todo número natural tiene un cuadrado (que también es un número natural)". La formalización sería $\forall x\ \exists y\ Q(x,y)$. Si esta fórmula es eskolemizada, resulta $\forall x\ Q(x,f(x))$. Parafraseada, la fórmula resultante se puede leer como 'todo número natural tiene un cuadrado que es su función'. En este caso, es evidente que $f(x) = x^2$.

En otros casos quizá no seremos capaces de dar una definición de la función de Skolem. Sin embargo, éste es un hecho sin importancia; lo que es realmente importante es que la función de Skolem evidencia la relación funcional entre x e y ($y = f(x)$).

Ejemplo de determinación de una forma normal de Skolem

Con la fórmula $\forall x\ [P(x) \vee (\exists t\ Q(x,t) \wedge \forall y\ R(x,y)) \rightarrow \exists z\ A(z) \wedge \neg\exists u\ B(u,x)]$. ejemplificamos el proceso completo de determinación de una forma normal de Skolem:

1) Se examina la fórmula para detectar variables libres. No las hay.

2) Se examina la fórmula para detectar repeticiones en el nombre de las variables. No se detecta ninguna repetición.

3) Se eliminan las implicaciones:

$$\forall x\ [\neg(P(x) \vee (\exists t\ Q(x,t) \wedge \forall y\ R(x,y))) \vee (\exists z\ A(z) \wedge \neg\exists u\ B(u,x))].$$

4) Se aplican las leyes de De Morgan para acercar las negaciones a los símbolos de predicados:

$$\begin{aligned}
&\forall x\ [\neg(P(x) \vee (\exists t\ Q(x,t) \wedge \forall y\ R(x,y))) \vee (\exists z\ A(z) \wedge \neg\exists u\ B(u,x))] \ \dashv\vdash \\
&\dashv\vdash\ \forall x\ [(\neg P(x) \wedge \neg(\exists t\ Q(x,t) \wedge \forall y\ R(x,y))) \vee (\exists z\ A(z) \wedge \forall u\ \neg B(u,x))] \ \dashv\vdash \\
&\dashv\vdash\ \forall x\ [(\neg P(x) \wedge (\neg\exists t\ Q(x,t) \vee \neg\forall y\ R(x,y))) \vee (\exists z\ A(z) \wedge \forall u\ \neg B(u,x))] \ \dashv\vdash \\
&\dashv\vdash\ \forall x\ [(\neg P(x) \wedge (\forall t\ \neg Q(x,t) \vee \exists y\ \neg R(x,y))) \vee (\exists z\ A(z) \wedge \forall u\ \neg B(u,x))]
\end{aligned}$$

5) Se eliminan los cuantificadores existenciales: la variable y es sustituida por una función de x. La variable z es sustituida por otra función de x:

$$\forall x\ [(\neg P(x) \wedge (\forall t\ \neg Q(x,t) \vee \neg R(x,f(x)))) \vee (A(g(x)) \wedge \forall u\ \neg B(u,x))].$$

6) Se mueven todos los cuantificadores universales a la izquierda:

$$\forall x\ \forall t\ \forall u\ [(\neg P(x) \wedge (\neg Q(x,t) \vee \neg R(x,f(x)))) \vee (A(g(x)) \wedge \neg B(u,x))].$$

7) Se calcula la forma normal conjuntiva de la matriz:

$$\begin{aligned}
&\forall x\ \forall t\ \forall u\ [(\neg P(x) \vee A(g(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg B(u,x)) \wedge (\neg Q(x,t) \vee \neg R(x,f(x)) \vee A(g(x))) \wedge \\
&\qquad \wedge (\neg Q(x,t) \vee \neg R(x,f(x)) \vee \neg B(u,x))].
\end{aligned}$$

La aplicación de las leyes de De Morgan provoca que algunos cuantificadores universales se conviertan en existenciales, y a la inversa. Ésta es la razón por la cual la eskolemización (paso 5) no se puede aplicar antes: se correría el riesgo de eliminar cuantificadores existenciales que posteriormente se tendrían que convertir en universales y, además, podrían aparecer nuevos cuantificadores existenciales, por transformación de los universales.

5. Resolución

5.1. Las novedades: forma normal de Skolem y sustituciones

El método de resolución que hemos estudiado en esta asignatura para la lógica de enunciados también se puede utilizar para validar o refutar razonamientos expresados en el lenguaje de fórmulas. Sólo es necesario que adaptemos el método de resolución a sus particularidades.

Recordad el método de resolución para enunciados que hemos visto en el apartado 5 del módulo "Lógica de enunciados".

El **método de resolución de la lógica de predicados** se basa en:

1) Una única regla: la de resolución.

2) Una única estrategia: la reducción al absurdo.

3) La utilización de la forma normal de Skolem (con matriz en FNC).

4) La utilización de la técnica del replanteamiento de la última decisión, para garantizar la sistematicidad.

5) El cálculo de sustituciones y el algoritmo de unificación.

El último punto representa la novedad realmente importante de la resolución en la lógica de predicados.

5.2. Sustituir variables por términos

5.2.1. Ejemplo comentado

El concepto de sustitución es muy importante. Una explicación mediante un ejemplo nos permitirá una introducción informal.

Supongamos que queremos validar el razonamiento "Todos los hombres son impacientes. Juan es un hombre. Consecuentemente, Juan es impaciente".

Si asignamos a $H(x)$ "x es un hombre", a a (constante) "Juan" y a $I(x)$ "x es impaciente", entonces:

$$\forall x\ [H(x) \to I(x)],\ H(a)\ \therefore\ I(a).$$

Encontramos a continuación las formas normales de Skolem:

- FNS ($\forall x\ [H(x) \to I(x)]$) = $\forall x\ [\neg H(x) \vee I(x)]$.
- FNS ($H(a)$) = $H(a)$.
- FNS ($\neg I(a)$) = $\neg I(a)$.

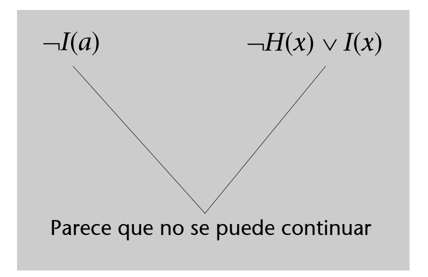
A la hora de considerar las cláusulas, los cuantificadores no se tienen en cuenta, pero no hay que olvidar que todos son universales. Así pues, si en una cláusula aparece una variable, esto quiere decir que estaba cuantificada y que el cuantificador era universal.

El conjunto de cláusulas resultante es:

$$S = \{ \neg H(x) \vee I(x), H(a), \neg I(a) \}.$$

con el conjunto de apoyo { $\neg I(a)$ }.

El árbol de resolución correspondiente a este ejemplo sería el que presentamos a continuación:



Parece que no se puede continuar porque en la cláusula troncal se tiene $\neg I(a)$, mientras que en la lateral se tiene $I(x)$ y, dado que son diferentes, la regla de resolución no se puede aplicar.

Se podría aplicar...

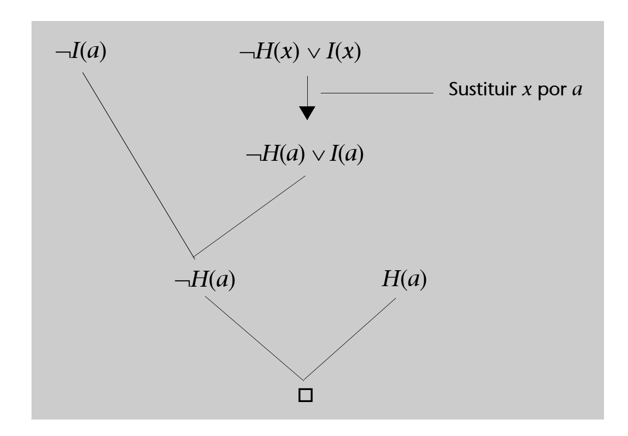
... la regla de resolución en este caso si la cláusula lateral contuviese el literal $I(a)$.

Efectivamente, la regla de resolución no se puede aplicar, ya que un literal no es la negación del otro. Ahora bien, el literal $I(x)$ contiene la variable x. Si esta variable pudiese ser sustituida por la constante a, entonces la situación se desbloquearía. ¿Es posible esta sustitución?

La respuesta es afirmativa porque la cláusula troncal es realmente $\forall x\ [\neg H(x) \vee I(x)]$ y porque la regla de eliminación del cuantificador universal afirma que una variable cuantificada universalmente puede ser sustituida por cualquier término, y la constante a es un término.

En conclusión, la variable x se puede sustituir por la constante a (de hecho, lo que se hace es aprovechar que $\forall x\ [\neg H(x) \vee I(x)] \vdash \neg H(a) \vee I(a)$).

Así pues, obtendríamos el árbol de resolución siguiente:



5.2.2. Quién sustituye a quién y cómo lo hace

Cuando el método de resolución se aplica a la lógica de predicados, la **sustitución de variables** es imprescindible. Así pues, hay que tener claros los aspectos que presentamos a continuación:

1) En cada momento se debe elegir aquella sustitución que, una vez aplicada, permita eliminar el literal de más a la derecha de la cláusula troncal. Aunque una variable pueda ser sustituida por cualquier término, sólo son útiles las sustituciones que conducen a la eliminación de este literal.

2) Si hay más de una sustitución que permite eliminar el literal de más a la derecha de la cláusula troncal, se utiliza cualquiera, y el resto se reserva como alternativa por si hay que aplicar el replanteamiento de la última decisión.

3) Sólo se pueden sustituir las variables. Una variable puede ser sustituida por una constante, por una función o por otra variable. Sin embargo, ni las constantes ni las funciones pueden ser sustituidas por nada.

Hay una excepción a la posibilidad de sustituir una variable por cualquier término: una variable no puede ser sustituida por una función de sí misma.

4) Cuando una variable es sustituida, hay que sustituir todas las apariciones de esta variable en la cláusula donde aparece. No obstante, la cláusula original se debe dejar intacta. La sustitución se debe hacer sobre la copia que se utiliza en el árbol de resolución.

Por ejemplo,...

... x se puede sustituir por $f(y)$ o por $g(y,z)$, pero nunca por $f(x)$ o por $g(y,x)$, ya que son funciones de sí misma.

5.3. Más ejemplos

1) Queremos validar el siguiente razonamiento:

$\forall x\, \forall y\, [C(x,y) \rightarrow C(y,x)],\ \exists y\, \forall x\, C(x,y),\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, [C(x,y) \wedge C(y,z) \rightarrow C(x,z)]\ \therefore\ \forall x\, C(x,x).$

En primer lugar, es necesario que encontremos las formas normales de Skolem de las premisas y de la negación de la conclusión:

- FNS($\forall x\ \forall y\ [C(x,y) \rightarrow C(y,x)]$) = $\forall x\ \forall y\ [\neg C(x,y) \vee C(y,x)]$.
- FNS($\exists y\ \forall x\ C(x,y)$) = $\forall x\ C(x,a)$*.
- FNS($\forall x\ \forall y\ \forall z\ [C(x,y) \wedge C(y,z) \rightarrow C(x,z)]$) = $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\neg C(x,y) \vee \neg C(y,z) \vee C(x,z)]$.
- FNS($\neg\forall x\ C(x,x)$) = $\neg C(b,b)$**

* *a* es una constante nueva que sustituye *y*.

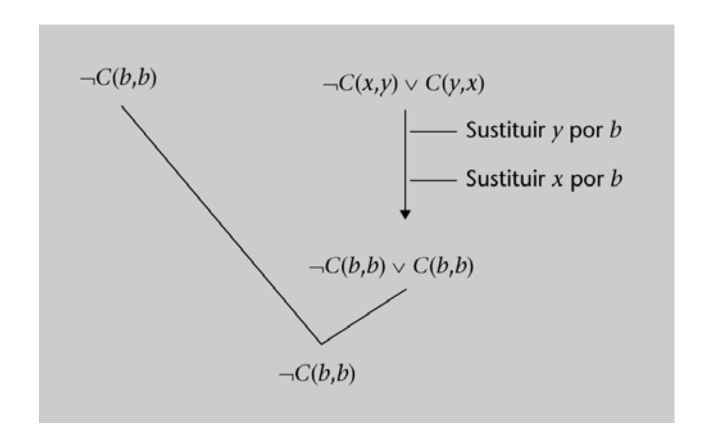
** *b* es una constante nueva que sustituye *x*.

De este modo, el conjunto de cláusulas resultante es el siguiente:

$$S = \{ \neg C(x,y) \vee C(y,x),\ C(x,a),\ \neg C(x,y) \vee \neg C(y,z) \vee C(x,z),\ \neg C(b,b) \}$$

con el conjunto de apoyo $\{ \neg C(b,b) \}$.

El primer intento de empezar la resolución sería:

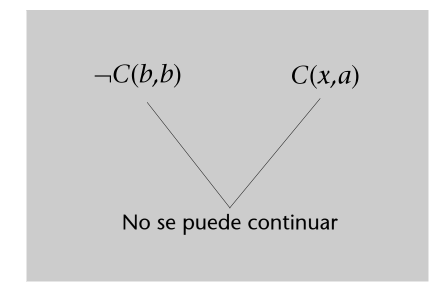


Observación

Las sustituciones necesarias se indican al lado del árbol de resolución. El resultado de aplicarlas se indica bajo la cláusula afectada (pueden ser las dos, tanto la lateral como la troncal). Cuando es necesaria más de una sustitución, éstas se indican en secuencia.

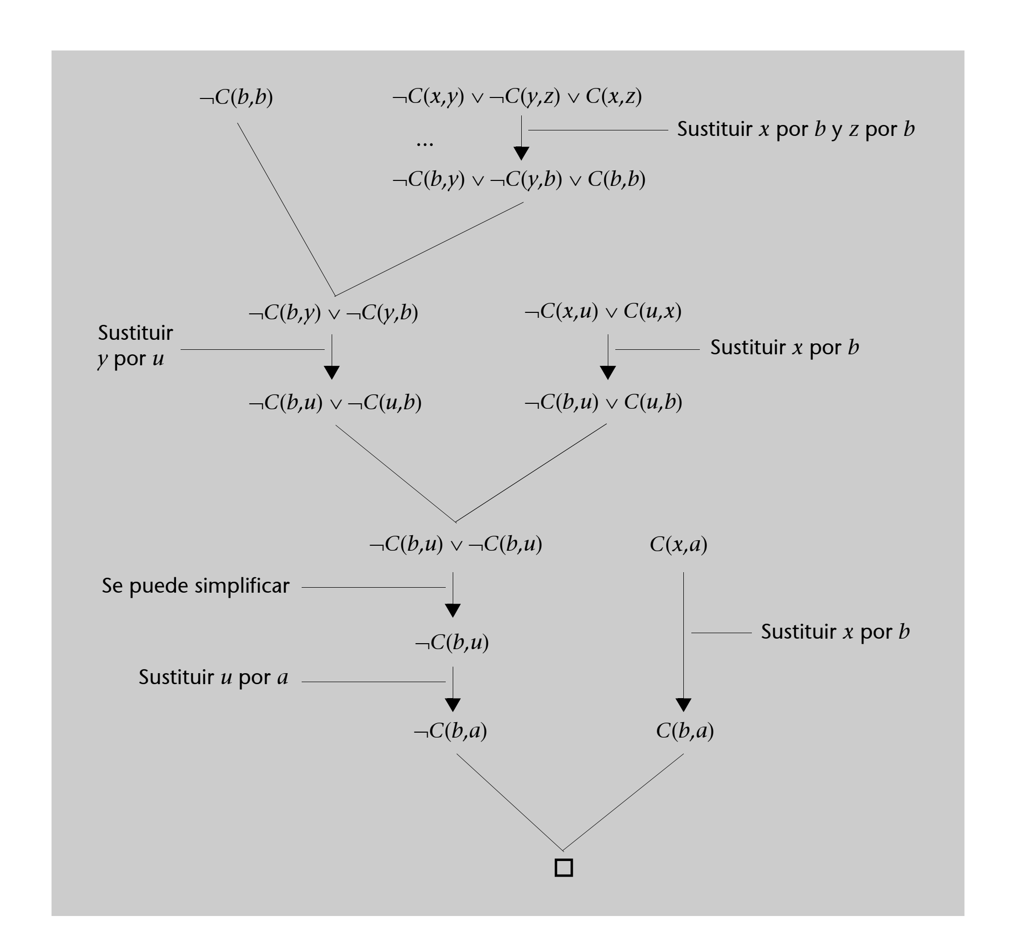
Dado que se ha producido una repetición, es necesario plantearse la última decisión tomada.

El siguiente intento sería:



Este intento fracasa porque aunque la variable *x* puede sustituirse por *b* haciendo que la cláusula lateral quede $C(b,a)$, ni *a* puede sustituirse por *b* ni *b* puede sustituirse por *a*.

El tercer intento nos llevará al siguiente árbol de resolución (dejamos de mostrar los intentos sin éxito que comportan replanteamientos).



Observad que cuando se utiliza la cláusula $\neg C(x,y) \vee C(y,x)$ se cambia el nombre de la variable y por u. Esto se hace así para evitar que antes de empezar a calcular las sustituciones necesarias, la cláusula troncal y la lateral tengan variables con el mismo nombre. Esto podría provocar fácilmente confusiones en las sustituciones. En este caso concreto, el cambio de nombre no era estrictamente necesario.

Cambio de nombre

Pasar de $\neg C(x,y) \vee C(y,x)$ a $\neg C(x,u) \vee C(u,x)$ es perfectamente lícito porque:
$\forall x \forall y\ [\neg C(x,y) \vee C(y,x)] \dashv \vdash$
$\dashv \vdash\ \forall x \forall u\ [\neg C(x,u) \vee C(u,x)]$

2) Validemos el razonamiento siguiente:

$$\forall x\ [\forall y\ A(y,x) \to \exists z\ B(z,x)]\ \therefore \forall x\ \exists y\ [A(y,x) \to B(y,x)]$$

En primer lugar buscamos las formas normales de Skolem:

a) Para la premisa:

$$\text{FNS}(\forall x\ [\forall y\ A(y,x) \to \exists z\ B(z,x)]) = \forall x\ [\neg A(f(x),x) \vee B(g(x),x)].$$

b) Para la negación de la conclusión:

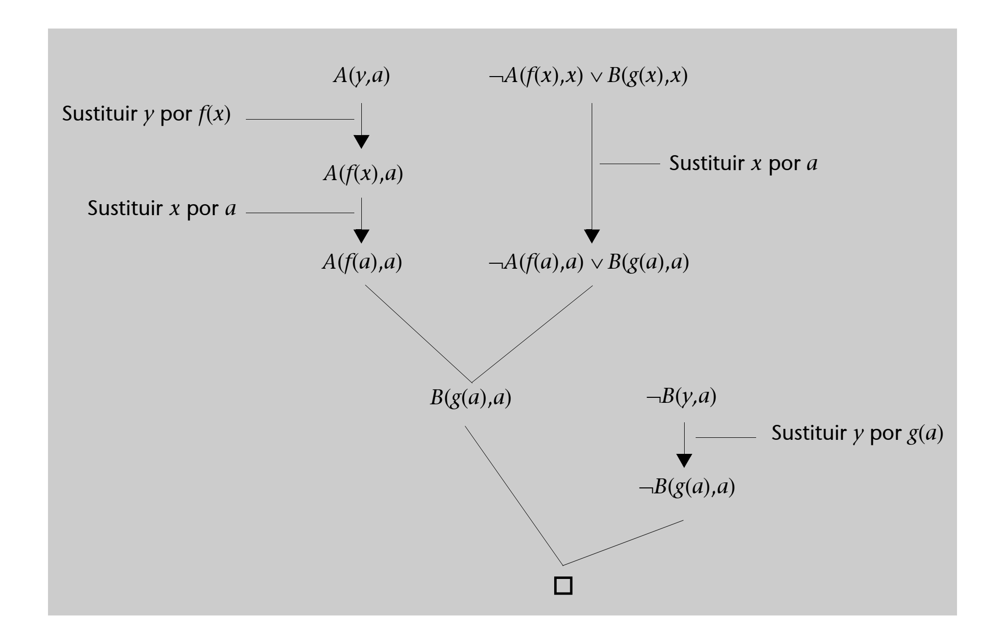
$$\text{FNS}(\neg \forall x\ \exists y\ [A(y,x) \to B(y,x)]) = \forall y\ [A(y,a) \wedge \neg B(y,a)].$$

El conjunto de cláusulas resultante es:

$$S = \{ \neg A(f(x),x) \vee B(g(x),x),\ A(y,a),\ \neg B(y,a) \}$$

con el conjunto de apoyo $\{ A(y,a), \neg B(y,a) \}$.

El árbol que obtendremos será el que representamos a continuación:



3) Como en la lógica de enunciados, cuando todas las alternativas posibles se han tenido en cuenta sin éxito, entonces se puede afirmar que el razonamiento no es correcto.

Es lo que muestra el ejemplo siguiente:

Demostrar que el razonamiento $\forall x\ \exists y\ A(x,y)\ \therefore\ \exists x\ [\forall y\ A(y,y) \vee \forall y\ A(y,x)]$ no es válido.

Las formas normales de Skolem son las siguientes.

a) Para la premisa: $\text{FNS}(\forall x\ \exists y\ A(x,y)) = \forall x\ A(x,f(x))$.

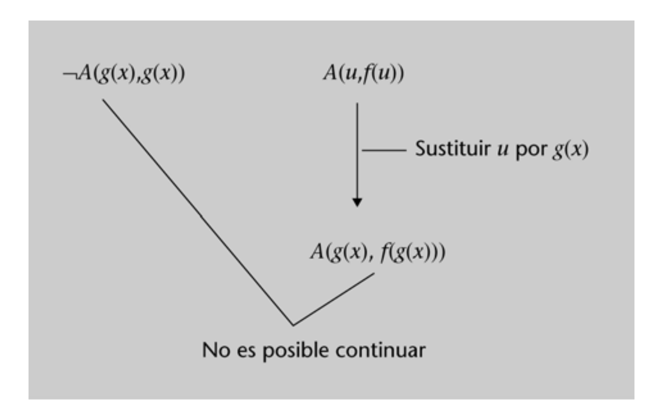
b) Para la negación de la conclusión:

$$\text{FNS}(\neg\exists x\ [\forall y\ A(y,y) \vee \forall y\ A(y,x)]) = \forall x\ [\neg A(g(x), g(x)) \wedge \neg A(h(x),x)].$$

El conjunto de cláusulas que se obtiene es (las dos últimas son el conjunto de apoyo):

$$S = \{ A(x,f(x)),\ \neg A(g(x),g(x)),\ \neg A(h(x),x) \}$$

El primer intento de iniciar la resolución es:

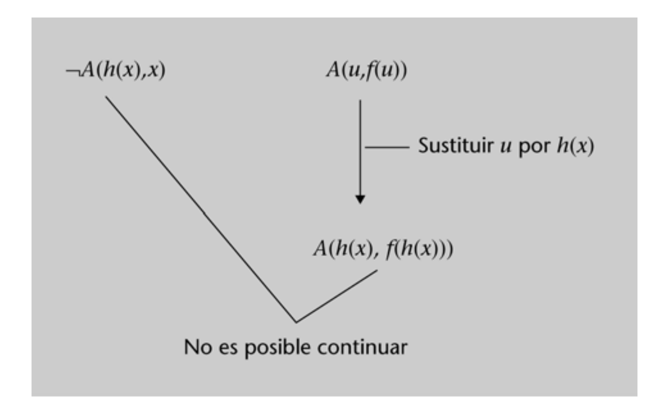


Este primer intento fracasa porque $g(x)$ no puede sustituirse por $f(g(x))$ ni $f(g(x))$ se puede sustituir por $g(x)$. Y es que ninguno de los dos es una variable.

Observación

Os podéis dar cuenta de que al utilizar la cláusula $A(x,f(x))$ hemos cambiado x por u para evitar duplicidad de nombres con la cláusula troncal.

El segundo intento también fracasa:



En este caso el problema radica en que la sustitución de x por $f(h(x))$ no es posible porque una variable no puede ser sustituida por una función de sí misma.

Con esto se han agotado las posibilidades con las cláusulas del conjunto de apoyo. Si descartamos estas cláusulas, el conjunto se reduce a $\{ A(x,f(x)) \}$, y de este conjunto nunca obtendremos □. Ya podemos concluir que el razonamiento no es correcto.

5.4. Automatización del cálculo de sustituciones: el algoritmo de unificación

El hecho de poder determinar en cada momento cuáles son las sustituciones que hay que llevar a cabo es una cuestión muy importante para la aplicación del método de resolución. A menudo es posible determinarlas a partir de la simple inspección de los literales involucrados. Para aquellas situaciones don-

de la simple inspección no es suficiente, o cuando se quiere mecanizar el método, hay el algoritmo de unificación para calcular sustituciones.

Antes de presentar este algoritmo, es necesario dar toda una serie de definiciones que os serán útiles:

a) Unificar significa determinar si dos expresiones pueden llegar a ser idénticas aplicando las sustituciones adecuadas de sus variables.

b) Una **sustitución** es un par de la forma <*v*/*t*>, donde *v* es una variable y *t* es un término*.

c) Un **unificador** (σ) es una secuencia de sustituciones que unifica** dos expresiones. Para denotar que el unificador σ se aplica a la fórmula *F*, se escribe Fσ. Así, si σ es un unificador de *F*1 y de *F*2, entonces *F*1σ = *F*2σ.

*** El término puede ser una constante, una variable o una función que no lo sea de *v*.**

**** Es decir, que hace idénticas ambas expresiones.**

Cuando un par de fórmulas *F*1 y *F*2 de un único predicado tienen un unificador que las hace idénticas, entonces se dice que son **fórmulas unificables**.

d) Dadas dos fórmulas con el mismo predicado *F*1 y *F*2, una **discrepancia** es un par de términos que son diferentes pero que ocupan la misma posición en el predicado.

Ejemplo de discrepancia

a) Las fórmulas *P*(*x*,*b*) y *P*(*a*,*b*) presentan la discrepancia <*x*,*a*>, porque en la primera posición se tiene *x* en la primera fórmula y a en la segunda.

b) Las fórmulas *Q*(*x*,*f*(*x*),*y*) *y Q*(*z*,*a*,*b*) presentan las discrepancias <*x*,*z*>, <*f*(*x*),*a*> *e* <*y*,*b*>, porque en ninguna de las tres posiciones se tiene el mismo término.

Cuando dos fórmulas con el mismo predicado no tienen ninguna discrepancia, están unificadas (son **fórmulas idénticas**).

Dado un par de fórmulas con el mismo predicado, el **algoritmo de unificación** calcula el unificador que las hace idénticas, si éste existe, o informa de su no-unificabilidad, si éste no existe:

Algoritmo cálculo_del_unificador (*F*1, *F*2: fórmulas con el mismo predicado)
/* *F*1 y *F*2 son las fórmulas que se quiere unificar */
D: = conjunto de las discrepancias entre *F*1 y *F*2
σ: = ∅ /* inicialmente la sustitución está vacía –nula– */
unificable: = cierto
/* iterar mientras haya discrepancias y posibilidad de superarlas */
mientras *D* < > ∅ y unificable **hacer**
    */ buscar la primera discrepancia y sacarla del conjunto */
    <*t*1, *t*2> : = la primera discrepancia de *D*
    D: = *D* – {<*t*1, *t*2>}
    /* intentar superar la discrepancia */
    si *t*1 es una variable y *t*2 es un término que no es una función de *t*1
    o al revés, *t*1 es el término y *t*2 es la variable

```
            entonces
               /* la discrepancia es superable */
               variable: = la variable de <t1, t2>
               término: = el término de <t1, t2>
               /* ampliar la sustitución */
               añadir <variable/término> al final de σ
               /* aplicar la sustitución a las fórmulas */
               F1: = F1σ
               F2: = F2σ
               /* aplicar la sustitución a lo que queda del conjunto */
               /* de discrepancias */
               D : = Dσ
            sino
               si t1 y t2 son la misma función con parámetros diferentes
                 entonces
                   aplicar este mismo algoritmo para unificar las funciones
                   si las funciones son unificables
                     entonces
                       Añadir su unificador al final de σ
                       F1: = F1σ; F2: = F2σ
                       D: = Dσ
                     sino
                       unificable : = falso
                 fsi
               sino
                   unificable : = falso
             fsi
         fsi
      fmientras
      si unificable
         entonces
            finalizar el algoritmo con respuesta:
            1. σ es el unificador que se buscaba
            2. las fórmulas unificadas quedan: F1
         sino
            finalizar el algoritmo con respuesta:
            las fórmulas no son unificables
      fsi
   falgoritmo
```

Ejemplos de aplicación del algoritmo de unificación

Unos cuantos ejemplos de aplicación del algoritmo de unificación, cuyas trazas mostraremos, nos servirán para ilustrar su funcionamiento.

a) Traza 1. Queremos unificar las fórmulas $P(x,g(x,y),a)$ y $P(f(z),u,w)$.

El algoritmo es aplicable porque son fórmulas con el mismo predicado. Por tanto, $F1 = P(x,g(x,y),a)$ y $F2 = P(f(z),u,w)$. El conjunto de discrepancias es $D = \{ \langle x,f(z)\rangle, \langle g(x,y),u\rangle, \langle a,w\rangle \}$. Inicialmente $\sigma = \{ \}$.

- Iteración 1: la primera discrepancia del conjunto es $<x,f(z)>$. Se elimina del conjunto y éste queda $D = \{ <g(x,y),u>, <a,w> \}$. La discrepancia es de la forma variable (x)/término ($f(z)$). La sustitución que hay que hacer para solucionarla es $<x/f(z)>$. Esta sustitución se añade al final de σ, y queda $\sigma = \{ <x/f(z)> \}$.

El unificador se aplica a las fórmulas y a D (sólo hay que sustituir x por $f(z)$), y queda lo siguiente:

$$F1 = P(f(z),g(f(z),y),a),\ F2 = P(f(z),u,w) \text{ y } D = \{ <g(f(z),y),u>, <a,w> \}.$$

- Iteración 2: la primera discrepancia del conjunto es $<g(f(z),y),u>$. Se saca del conjunto y éste queda $D = \{ <a,w> \}$. La discrepancia es de la forma término/variable, y la sustitución que hay que hacer para solucionarla es $<u/g(f(z),y)>$. Esta sustitución se añade al final de σ, y queda $\sigma = \{ <x/f(z))>, <u/g(f(z),y)> \}$.

El unificador se aplica a las fórmulas y a D, y queda lo siguiente:

$$F1 = P(f(z),g(f(z),y),a),\ F2 = P(f(z),g(f(z),y),w) \text{ y } D = \{ <a,w> \}.$$

- Iteración 3: la primera discrepancia del conjunto es $<a,w>$, que se saca del conjunto y queda vacío. La discrepancia es de la forma término/variable, y la sustitución que hay que llevar a cabo para solucionarla es $<w/a>$. Esta sustitución se añade al final de σ, y queda $\sigma = \{ <x/f(z)>, <u/g(f(z),y)>, <w/a> \}$.

Este unificador se aplica a las fórmulas y a D, y queda lo siguiente:

$$F1 = P(f(z),g(f(z),y),a),\ F2 = P(f(z),g(f(z),y),a) \text{ y } D = \{ \}.$$

- Final: ambas fórmulas son unificables, el unificador es $\sigma = \{ <x/f(z)>, <u/g(f(z),y)>, <w/a> \}$, y el resultado de la unificación es el siguiente:

$$P(f(z),g(f(z),y),a).$$

b) Traza 2. Queremos unificar las fórmulas $Q(a,x,f(g(y)))$ y $Q(z,h(z,w),f(w))$. En este caso, el conjunto de discrepancias es $D = \{ <a,z>, <x,h(z,w)>, <f(g(y)),f(w)> \}$ ..

- Iteración 1: la primera discrepancia da lugar a la sustitución $<z/a>$, con lo cual las fórmulas quedan $F1 = Q(a,x,f(g(y)))$, $F2 = Q(a,h(a,w),f(w))$, y el conjunto de discrepancias, $D = \{ <x,h(a,w)>,<f(g(y)),f(w)> \}$.

- Iteración 2: la primera discrepancia del conjunto da lugar a la sustitución $<x/h(a,w)>$. Con esto, las fórmulas quedan $F1 = Q(a,h(a,w),f(g(y)))$, $F2 = Q(a,h(a,w),f(w))$, y el conjunto de discrepancias, $D = \{ <f(g(y)),f(w)> \}$.

- Iteración 3: la última discrepancia del conjunto es $<f(g(y)),f(w)>$. Ésta no es una discrepancia de la forma término/variable, sino que se trata de una discrepancia de la forma función/función. Dado que la función es la misma en ambos casos, es posible intentar unificarlas. Como podéis ver, la discrepancia es $<g(y),w>$, que se puede solucionar con la sustitución $<w/g(y)>$. Así, el unificador de $f(g(y))$ y $f(w)$ es $\{ <w/g(y)> \}$. Este unificador se añade al final del que se construía para las dos fórmulas, y queda $\sigma = \{ <z/a>,<x/h(a,w)>, <w/g(y)> \}$.

- Final: las dos fórmulas son unificables, el unificador es $\sigma = \{ <z/a>,<x/h(a,w)>, <w/g(y)> \}$, y el resultado de la unificación es el siguiente:

$$Q(a,h(a,g(y)),f(g(y))).$$

c) Traza 3. Queremos unificar las fórmulas $R(x,f(y,z))$ y $R(x,a)$. En este caso, el conjunto de discrepancias es $D = \{ <f(y,z),a> \}$.

- Iteración 1: la única discrepancia de este conjunto no es de la forma variable/término ni de la forma función/función. Consecuentemente, no hay ninguna sustitución que la pueda solucionar.

- Final: las fórmulas no son unificables.

d) Traza 4. Queremos unificar las fórmulas $S(f(a))$ y $S(f(h(b)))$. El conjunto de discrepancias es $D = \{ <f(a),f(h(b))> \}$.

- Iteración 1: la única discrepancia del conjunto es de la forma función/función. Por tanto, se intenta la unificación de las dos funciones. En el caso de las funciones $f(a)$ y $f(h(b))$, la única discrepancia es $<a,h(b)>$. Esta discrepancia no es de la forma variable/término ni de la forma función/función. Así, las dos funciones no son unificables y, consecuentemente, no hay una sustitución que solucione la discrepancia original.

- Final: las fórmulas no son unificables.

6. La programación lógica

6.1. ¿Qué es la programación lógica?

La programación lógica es el punto donde confluyen la lógica y la informática.

La **programación lógica** ofrece los mecanismos necesarios para poder describir un algoritmo en términos de propiedades y de relaciones lógicas entre objetos.

Un programa escrito en un lenguaje de programación de los denominados *lógicos* es una colección de sentencias lógicas (típicamente, *fórmulas*) que describen una determinada situación. El programador debe especificar todas las propiedades y todas las relaciones que son relevantes por lo que respecta a los objetos que participan en la situación que se describe.

Ejecutar un programa lógico consiste en determinar si una conclusión dada se sigue de las sentencias lógicas especificadas. Por esta razón, los intérpretes de estos lenguajes implementan un demostrador automático.

6.2. La lógica de predicados "implementada": Prolog

6.2.1. Elementos básicos: cláusulas y reglas

El lenguaje de programación lógica más conocido y utilizado es el Prolog (*Programming in the logic*). Un **programa Prolog** es una colección de reglas (también denominadas *predicados*). Cada regla especifica una relación entre objetos.

Sintácticamente, una **regla de un programa Prolog** se compone de una o más cláusulas. La **forma general de una cláusula** es la siguiente:

```
<parte-izquierda> :- <parte-derecha>.
```

En el contexto...

... de la programación en Prolog, palabras como predicado o cláusula tienen un significado ligeramente diferente del que se les ha dado hasta ahora.

donde `<parte-izquierda>` debe ser simple (no contener conectivas), mientras que `<parte-derecha>` puede no serlo (puede contener conjunciones).

A continuación presentamos dos ejemplos en los que se definirán dos reglas de un programa Prolog que contendrán una cláusula o dos, respectivamente:

a) Una regla con una única cláusula:

```
abuelo (X, Y) :- progenitor (Z, Y), padre (X, Z).
```

Si utilizamos la notación a la que estamos acostumbrados, podríamos decir lo siguiente: asignamos a abuelo (X, Y) "X es el abuelo de Y", a progenitor (Z, Y) "Z es un progenitor de Y" y a padre (X, Z) "X es el padre de Z".

> En Prolog las variables se representan con letras mayúsculas o, más concretamente, con cadenas de caracteres que comienzan con una letra mayúscula. El símbolo :– puede leerse como una implicación invertida (←), y las comas hacen el papel de conjunciones.

b) Una regla que consta de dos cláusulas:

```
progenitor (X, Y) :- padre (X, Y).

progenitor (X, Y) :- madre (X, Y).
```

Las cláusulas de Prolog no son más que implicaciones escritas con una sintaxis particular. Así, para la misma regla del ejemplo que acabamos de ver, tenemos que:

```
abuelo (X, Y) :- progenitor (Z, Y), padre (X, Z).
```

que quiere decir que 'si Z es un progenitor de Y y X es el padre de Z, entonces X es el abuelo de Y'.

Si trasladamos la expresión anterior a la notación del lenguaje de fórmulas, podemos escribir:

$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ [\text{progenitor}\ (Z, Y) \wedge \text{padre}\ (X, Z) \rightarrow \text{abuelo}\ (X, Y)].$$

Finalmente, es fácil entender por qué se denominan *cláusulas* las construcciones de la forma `<parte-izquierda> :- <parte-derecha>`. Si volvemos a la fórmula del ejemplo que acabamos de ver, y calculamos la FNS, vemos que ésta es la siguiente:

$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ [\neg\text{progenitor}\ (Z, Y) \vee \neg\text{padre}\ (X, Z) \vee \text{abuelo}\ (X, Y)],$$

que, efectivamente, es una cláusula (una vez eliminados los cuantificadores).

Notad que,...

... para no alejarnos excesivamente de la notación del Prolog, utilizamos símbolos de predicado de más de una letra y representamos las variables con letras mayúsculas.

Una **regla**, según se entiende en Prolog, es un conjunto de implicaciones de la forma:

$$B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow A$$

$$C_1 \wedge ... \wedge C_p \rightarrow A$$

donde A, B_i y C_i son predicados y donde las variables están cuantificadas universalmente.

La forma habitual de entender las cláusulas Prolog es la siguiente: la parte derecha especifica las condiciones que se deben cumplir (que deben ser verdaderas) para que se dé (es decir, sea verdadera) la parte izquierda.

Así, continuando con el ejemplo anterior, tenemos la cláusula que presentamos a continuación:

```
progenitor (X, Y) :- padre (X, Y).
```

Esta cláusula quiere decir que ‘para que X sea un progenitor de Y, es necesario que X sea el padre de Y’.

Con frecuencia se dice que las partes izquierdas representan objetivos, mientras que las derechas representan subobjetivos. Un objetivo queda conseguido cuando se han conseguido todos los subobjetivos asociados. ❗

Las cláusulas que no tienen parte izquierda se denominan **hechos**, y representan aquellas propiedades y relaciones que se dan de forma incondicional.

Ejemplos de hechos

- `padre (rafael, enrique).`
- `madre (margarita, enrique).`
- `madre (margarita, mercedes).`
- `padre (eliseo, rafael).`
- `padre (josé, margarita).`

En Prolog las constantes se representan con cadenas de caracteres que comienzan con una letra minúscula. Las cadenas que comienzan con una letra mayúscula son variables.

6.2.2. La validación de razonamientos entra en juego: consultas

Las cláusulas y los hechos son elementos computacionalmente pasivos, es decir, describen propiedades y relaciones, pero no provocan que se calcule (compute) nada. En Prolog los elementos activos se denominan **consultas**. Típicamente, las consultas se introducen cuando el intérprete muestra su *prompt*, que suelen ser los caracteres ?– o algo similar.

Un ejemplo de consulta, que parafraseamos como '¿Es Eliseo el padre de Rafael?'*, es el siguiente:

* Los caracteres ?- no deben ser introducidos por el usuario.

```
?- padre (eliseo, rafael).
```

Ante una consulta, el intérprete obra de la manera siguiente:

1) Considera todas las reglas y todos los hechos introducidos previamente como premisas.

2) Considera que el usuario pide que se valide la conclusión*.

* En el ejemplo que acabamos de exponer la conclusión sería `padre (eliseo, rafael).`

3) Intenta validar la conclusión e informa de si ha sido posible hacerlo.

Asumiendo que las reglas y los hechos conocidos por el intérprete son los que se han utilizado antes como ejemplo, tenemos que:

a) El intérprete respondería YES, lo cual indica que la conclusión es correcta. Entonces:

```
?- padre (eliseo, rafael).
YES
?-
```

b) Cuando la conclusión no se puede validar, el intérprete responde NO:

```
?- padre (enrique, josé).
NO
?-
```

c) No es necesario que las consultas se refieran a hechos explicitados. Dado el ejemplo que nos ocupa, tenemos lo siguiente:

```
?- abuelo (eliseo, enrique).
YES
?-
```

En el caso del ejemplo, el intérprete no conoce ningún hecho como abuelo (eliseo, enrique) y, a pesar de ello, es capaz de responder que la conclusión es válida. ¿Cómo lo hace? Aplica el método de resolución para validar la conclusión. El proceso, que explicaremos basándonos en el ejemplo en cuestión, es el siguiente: ❗

1) El intérprete descubre la cláusula siguiente:

```
abuelo (X, Y) :- progenitor (Z, Y), padre (X, Z).
```

Cambia los nombres de las variables y la reescribe así:

```
abuelo (X1, Y1) :- progenitor (Z1, Y1), padre (X1, Z1).
```

Como se quiere demostrar `abuelo (eliseo, enrique)`, el intérprete sustituye `X1` por `eliseo` e `Y1` por `enrique`, y queda la cláusula siguiente:

```
abuelo (eliseo, enrique) :- progenitor (Z1, enrique), padre
(eliseo, Z1).
```

Ante esta cláusula se entiende que, para demostrar que el abuelo de Enrique es Eliseo, se debe demostrar, en primer lugar, que *Z1* es un progenitor de Enrique y, después, que el padre de *Z1* es Eliseo. Esto es como decir que para conseguir el objetivo de demostrar que Eliseo es el abuelo de Enrique, es necesario, en primer lugar, conseguir los subobjetivos de demostrar que *Z1* es un progenitor de Enrique y, después, conseguir los de demostrar que Eliseo es el padre de *Z1*.

Si entendéis :- como ←,...

... veréis que lo único que hace el intérprete es intentar llegar al consecuente de una implicación: primero, necesita conseguir el antecedente.

2) El intérprete intenta demostrar `progenitor (Z1, enrique)`. En este intento descubre la cláusula `progenitor (X, Y) :- padre (X, Y)` y la reescribe como progenitor `(X2, Y2) :- padre (X2, Y2)`. A continuación, sustituye `X2` por `Z1` e `Y2` por `enrique`, y queda:

```
progenitor (Z1, enrique) :- padre (Z1, enrique).
```

En este punto entiende que para demostrar que *Z1* es un progenitor de Enrique, debe demostrar que *Z1* es el padre de Enrique.

Además, el intérprete "toma nota" de que la cláusula:

```
progenitor (X, Y) :- madre (X, Y).
```

también se podría haber utilizado. Esto es lo mismo que decir que la decisión de utilizar la cláusula progenitor (X, Y) :- padre (X, Y) tiene una alternativa.

3) El intérprete intenta demostrar padre `(Z1, enrique)`. En este intento descubre el hecho `padre (rafael, enrique)` y sustituye `Z1` por `rafael`. Con

esta sustitución queda demostrado que padre (Z1, enrique). Aquí es importante darse cuenta de la sustitución que se hace, porque todas las apariciones de la variable Z1 serán sustituidas por rafael.

Como queda demostrado que padre (rafael, enrique), también queda demostrado el hecho siguiente:

```
progenitor (rafael, enrique).
```

4) En este punto, la cláusula:

```
Abuelo (eliseo, enrique) :- progenitor (Z1, enrique), padre
(eliseo, Z1).
```

ya se ha reescrito de la manera siguiente:

```
abuelo (eliseo, enrique) :- progenitor (rafael, enrique), pa-
dre (eliseo, rafael).
```

En el punto anterior, ya se ha demostrado progenitor (rafael, enrique) y, por tanto, sólo queda demostrar padre (eliseo, rafael) para completar la demostración de abuelo (eliseo, enrique).

5) Ahora el intérprete intenta demostrar padre (eliseo, rafael). Descubre el hecho que padre (rafael, enrique), pero este no sirve para demostrar padre (eliseo, rafael). No obstante, hay una alternativa, que es el hecho siguiente:

```
padre (eliseo, rafael).
```

y este hecho es el mismo que se quiere demostrar.

6) Dado que los dos subobjetivos que había que demostrar se han demostrado, el intérprete responde YES.

6.2.3. Prolog implementa el método de resolución

La resolución que ejecuta un intérprete de Prolog es equivalente a la que se ha estudiado en esta asignatura. El mismo ejemplo que se acaba de ver servirá para demostrar que, efectivamente, un intérprete de Prolog no hace más que ejecutar una forma particular del algoritmo de resolución que conocemos.

> Recordad que hemos explicado el método de resolución mediante el algoritmo de unificación en el subapartado 5.4 de este módulo didáctico.

Las cláusulas y los hechos, que explicitamos a continuación:

- abuelo (X, Y) :- progenitor (Z, Y), padre (X, Z),
- progenitor (X, Y) :- padre (X, Y),

- `progenitor (X, Y) :- madre (X, Y),`
- `padre (rafael, enrique),`
- `madre (margarita, enrique),`
- `madre (margarita, mercedes),`
- `padre (eliseo, rafael),`
- `padre (josé, margarita),`

no son más que un conjunto de premisas como las siguientes:

- $\forall X\ \forall Y\ \forall Z$ [progenitor (Z, Y) $\wedge$ padre (X, Z) $\rightarrow$ abuelo (X, Y)],
- $\forall X\ \forall Y\ \forall Z$ [padre (X, Y) $\rightarrow$ progenitor (X, Y)],
- $\forall X\ \forall Y\ \forall Z$ [madre (X, Y) $\rightarrow$ progenitor (X, Y)],
- padre (Rafael, Enrique),
- madre (Margarita, Enrique),
- madre (Margarita, Mercedes),
- padre (Eliseo, Rafael),
- padre (José, Margarita),

mientras que la consulta abuelo (Eliseo, Enrique) es la conclusión.

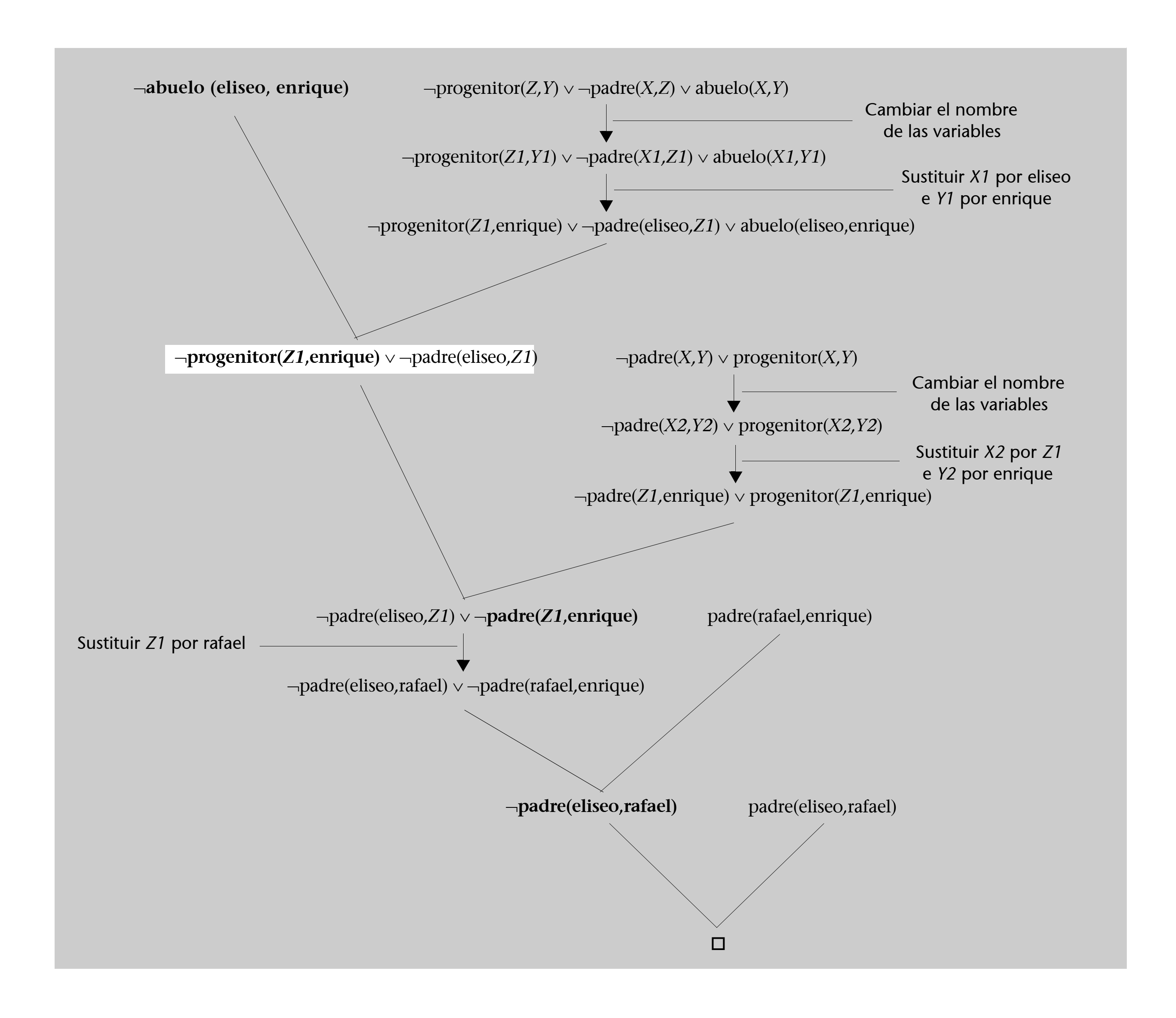
Todo esto da lugar al conjunto de cláusulas siguientes:

S = { $\neg$progenitor(Z,Y) $\vee$ $\neg$ padre(X,Z) $\vee$ abuelo(X,Y), $\neg$padre(X,Y) $\vee$ progenitor(X,Y), $\neg$madre(X,Y) $\vee$ progenitor(X,Y), padre (Rafael, Enrique), madre (Margarita, Enrique), madre (Margarita, Mercedes), padre (Eliseo, Rafael), padre (José, Margarita), $\neg$abuelo (Eliseo, Enrique) }

Con el conjunto de apoyo { $\neg$abuelo (Eliseo, Enrique) }.

A diferencia de la forma en que se hacía en el módulo anterior, en lugar de intentar eliminar el literal de más a la derecha, se harán las eliminaciones en el mismo orden en el que las haría un intérprete de Prolog. La cláusula que se tenga que eliminar será la que se encuentra en negrita en el gráfico de la página siguiente.

Si observáis la cláusula del recuadro, veréis que se corresponde con aquella situación en la que el intérprete acaba de descubrir que, para demostrar que el abuelo de Enrique es Eliseo, debe demostrar, en primer lugar, que *Z1* es un progenitor de Enrique y, después, que el padre de *Z1* es Eliseo. La misma analogía se puede hacer con las otras cláusulas troncales.



Un intérprete de Prolog demuestra todas sus capacidades* con consultas que incluyen variables. Para el ejemplo que nos ocupa, tenemos lo siguiente:

* Y, por tanto, las capacidades del método de resolución, en el cual se basa.

```
?- abuelo (X, enrique).

X = eliseo?
```

La consulta, que se puede parafrasear como '¿Hay algún X que sea el abuelo de Enrique?', tiene la respuesta que podéis observar (`X=Eliseo?`). Esto quiere decir dos cosas:

* Esta consulta expresada en el lenguaje de fórmulas quedaría como ∃x abuelo (X, Enrique).

a) Que se ha podido demostrar que hay algún X que es el abuelo de Enrique.

b) Que durante el proceso de demostración la variable X ha sido sustituida por la constante Eliseo y que, por tanto, Eliseo es el abuelo de Enrique.

El **método de resolución** sirve para validar razonamientos y, gracias a la sustitución de variables, para responder a determinadas cuestiones.

El intérprete ha "calculado" que Eliseo es el abuelo de Enrique. Sin embargo, si después de la respuesta del intérprete el usuario escribe ;, entonces el resultado es como el siguiente:

```
?- abuelo (X, enrique)
X=eliseo?,
X=josé?;
YES.
```

Utilizando el replanteamiento de la última decisión para explorar todas las alternativas posibles, el intérprete es capaz de determinar que sustituyendo X por José también puede demostrar la conclusión.

Resumen

Este módulo didáctico se ha iniciado con la constatación de la limitación expresiva del lenguaje de la lógica de enunciados. Esta limitación es paliada por el **lenguaje de fórmulas**, del cual el de enunciados es un subconjunto. Hemos presentado los elementos básicos de este nuevo lenguaje: los **predicados**, los **términos –variables** y **constantes–** y los **cuantificadores**. Y también la forma que tienen de relacionarse entre sí. Inmediatamente después, el lenguaje de fórmulas se ha puesto al servicio de la **formalización de frases**, expresadas en lenguaje natural.

La **deducción natural** se ha ampliado con **cuatro nuevas reglas** que permiten introducir y eliminar cuantificadores. La presencia de estos operadores proporciona a este método de validación una complejidad que no tenía en el caso de la lógica de enunciados y que, parcialmente, puede ser paliada por la **utilización de reglas derivadas** y **equivalencias deductivas.**

Para poder refutar razonamientos de invalidez segura, o casi segura, se ha estudiado la **manera de encontrar contraejemplos**. Antes ha sido necesario **adaptar el concepto de interpretación** a la mayor complejidad del lenguaje de fórmulas.

En el campo de la manipulación algebraica, la **forma normal de Skolem** adquiere el relieve de la forma normal conjuntiva. Para calcular esta forma normal, hay que eliminar los cuantificadores existenciales. El proceso para llevar a término esta eliminación recibe el nombre de **eskolemización**.

Después hemos vuelto al **método de resolución**. Éste, utilizando las formas normales de Skolem y apoyándose en la sustitución de variables por términos, permite validar y refutar razonamientos expresados en el lenguaje de fórmulas. Cuando es complicado calcular las sustituciones, el **algoritmo de unificación** describe minuciosamente lo que se debe hacer.

Finalmente, **Prolog** y la **programación lógica** muestran cómo la implementación del método de resolución es un punto donde lógica e informática confluyen.

Ejercicios de autoevaluación

1. Decid cuáles de estas listas de símbolos son fórmulas correctas del lenguaje de predicados y cuáles no lo son.
a) $T(a,b,x)$
b) $a \to b$
c) $T(x,\forall y\ Q(y),a)$
d) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$
e) $\neg\forall x\ Q(x) \to \forall y\ \neg Q(y)$
f) $\forall x\ (\forall y\ Q(a) \wedge \neg\exists z\ (P(x,z) \vee T(a,b,z)))$
g) $\exists z\ (T(x,y,z) \vee \forall P(z,z))$
h) $\forall x \wedge \forall z\ P(x,z)$
i) $\neg\forall x\ \neg\forall z$
j) $\neg\forall x\ \neg\forall z\ P(x,z)$
k) $\forall a\ \exists x\ \forall y\ T(a,x,y)$

2. Decid qué variables son libres, cuáles están ligadas y en el ámbito de qué cuantificador se hallan. En caso de que dos variables tengan el mismo nombre, decid si son diferentes o si son la misma variable.
a) $\forall x\ Q(x) \wedge \exists y\ P(x,y)$
b) $\exists x\ Q(a) \to \forall y\ P(x,y)$
c) $\forall x\ (\forall y\ T(x,y,z) \wedge \forall x\ Q(x) \to \exists z\ P(x,z))$
d) $\forall x\ \exists y\ (\exists z\ R(x,y,z,t) \vee \forall y\ \neg T(x,y,t) \vee Q(y))$
e) $\neg\exists x\ (\forall x\ Q(x) \wedge P(x,x)) \vee \neg T(x,x,x)$
f) $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\forall t\ R(x,y,z,t) \to \exists x\ P(x,t))$
g) $\forall x\ (\forall x\ P(x,x) \vee \neg Q(a) \to \forall y\ \neg R(a,x,a,y) \wedge T(y,y,x))$

3. Formalizad las frases que damos a continuación. Utilizad los predicados indicados entre paréntesis.
a) Las manzanas y las naranjas son gustosas y nutritivas ($P(x)$: "x es una manzana"; $T(x)$: "x es una naranja"; $G(x)$: "x es gustoso"; $N(x)$: "x es nutritivo").
b) Hay alimentos que sólo se pueden comer si han sido cocinados ($A(x)$: "x es un alimento"; $M(x)$: "x se puede comer"; $C(x)$: "x ha sido cocinado").
c) Sin frenos, no hay ningún auto seguro ($F(x)$: "x tiene frenos"; $A(x)$: "x es un auto"; $S(x)$: "x es seguro").
d) No todo el mundo es rico, culto y educado, ni todos los ricos son educados y cultos ($R(x)$: "x es rico"; $C(x)$: "x es culto"; $E(x)$: "x es educado". Dominio: conjunto de todas las personas).
e) No todas las cosas compradas a bajo precio son delicadas y quebradizas ($C(x)$: "x es una cosa"; $B(x)$: "x ha sido comprada a bajo precio"; $F(x)$: "x es delicada"; $T(x)$: "x es quebradiza").
f) No todo hombre que deserta es un cobarde ($H(x)$: "x es un hombre"; $D(x)$: "x deserta"; $C(x)$: "x es cobarde").

4. Formalizad las frases siguientes teniendo en cuenta los dominios que se proponen.
a) Todas las personas son honradas (Dominio: el conjunto de las personas).
b) Todas las personas son honradas (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
c) Algunas personas son honradas (Dominio: el conjunto de las personas).
d) Algunas personas son honradas (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
e) Juan es honrado (Dominio: el conjunto de las personas).
f) Juan es honrado (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
g) Las personas honradas se tratan con todo el mundo (Dominio: el conjunto de las personas).
h) Las personas honradas se tratan con todo el mundo (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
i) Las personas honradas sólo tratan con gente honrada (Dominio: el conjunto de las personas).
j) Las personas honradas sólo tratan con gente honrada (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
k) Algunas personas honradas sólo tratan con gente honrada (Dominio: el conjunto de las personas).
l) Hay gente no honrada que no se trata con nadie (Dominio: el conjunto de las personas).
m) Hay gente no honrada que no se trata con nadie (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
n) Juan y Marta se tratan mutuamente (Dominio: el conjunto de las personas honradas).
o) Juan se trata con algunas personas honradas (Dominio: el conjunto de las personas honradas).
p) Juan se trata con algunas personas honradas (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).

5. Formalizad las frases siguientes, utilizando los predicados que se indican. Si no se dice explícitamente lo contrario, el dominio es un conjunto no vacío cualquiera.
a) Los hay blancos y los hay negros, pero no los hay que sean blancos y negros al mismo tiempo ($B(x)$: "x es blanco"; $N(x)$: "x es negro").
b) Los hombres y las mujeres tienen sentimientos ($H(x)$: "x es un hombre"; $D(x)$: "x es una mujer"; $T(x)$: "x tiene sentimientos").
c) Todos los números racionales son reales, pero sólo algunos números reales son racionales (Dominio: conjunto de todos los números; $Q(x)$: "x es racional"; $R(x)$: "x es real").

d) No todos los productos caros son de calidad (*P*(*x*): "*x* es un producto"; *C*(*x*): "*x* es caro"; Q(*x*): "*x* es de calidad").
e) Sólo las personas muy inteligentes son socias del club (Dominio: el conjunto de todas las personas; *I*(*x*): "*x* es muy inteligente"; *S*(*x*): "*x* es socio del club").
f) Todos los deportistas federados tienen un seguro (Dominio: el conjunto de todos los deportistas; *F*(*x*): "*x* está federado"; *T*(*x*): "*x* tiene un seguro").
g) Todos los deportistas federados tienen un seguro (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera; *E*(*x*): "*x* es un deportista"; *F*(*x*): "*x* está federado"; *A*(*x*): "*x* es un seguro"; *T*(*x*,*y*): "*x* tiene *y*").
h) Si no hay subvenciones, ninguna institución funciona correctamente (*S*(*x*): "*x* es una subvención"; *I*(*x*): "*x* es una institución"; *F*(*x*): "*x* funciona correctamente").
i) Ciertos espectadores admiran a todos los presentadores, pero no hay ningún presentador que admire a todos los espectadores (*E*(*x*): "*x* es un espectador"; *P*(*x*): "*x* es un presentador"; *A*(*x*,*y*): "*x* admira a *y*" –"*y* es admirado por *x*"–).
j) Todos los animales que viven en un zoológico sienten nostalgia de la libertad (*A*(*x*): "*x* es un animal"; *Z*(*x*): "*x* es un zoológico"; *V*(*x*,*y*): "*x* vive en *y*"; *N*(*x*): "*x* siente nostalgia de la libertad").
k) Hay personas que compran todos los objetos que aparecen en los catálogos (*P*(*x*): "*x* es una persona"; *O*(*x*): "*x* es un objeto"; *C*(*x*): "*x* es un catálogo"; *B*(*x*,*y*): "*x* compra *y*"; *A*(*x*,*y*): "*x* aparece en *y*").
l) Hay personas que compran todos los objetos que aparecen en todos los catálogos (*P*(*x*): "*x* es una persona"; *O*(*x*): "*x* es un objeto"; *C*(*x*): "*x* es un catálogo"; *B*(*x*,*y*): "*x* compra *y*"; *A*(*x*,*y*): "*x* aparece en *y*").
m) Cada persona misteriosa tiene algún secreto que sus vecinos desconocen (*P*(*x*): "*x* es una persona misteriosa"; *S*(*x*): "*x* es un secreto"; *T*(*x*,*y*): "*x* tiene *y*" –"*y* es de *x*"–; *V*(*x*,*y*): "*x* es vecino de *y*"; *D*(*x*,*y*): "*x* desconoce *y*").

6. Formalizad las frases siguientes en los dominios indicados. Antes de hacer la formalización, debéis decir qué predicados utilizaréis y con qué significado:
a) Sólo los catalanes comen escudella (Dominio: el conjunto de todos los europeos).
b) En cada empresa trabaja un administrativo poco honrado (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
c) Cada diputado se sienta en un escaño (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
d) Hay un escaño donde se han sentado todos los diputados (Dominio: un conjunto donde hay escaños y diputados).
e) Hay periodistas que conocen todos los secretos de los famosos (Dominio: un conjunto no vacío cualquiera).
f) Los informáticos sólo entienden a los informáticos (Dominio: un conjunto cualquiera de personas).
g) Cuando un miembro de la pandilla se encuentra mal, todos se ponen de mal humor (Dominio: el conjunto formado por todos los miembros de la pandilla).
h) Cuando un miembro de la pandilla se encuentra mal, todos se ponen de mal humor (Dominio: un conjunto de personas cualquiera).

7. Formalizad las frases que se dan a continuación utilizando única y exclusivamente los predicados siguientes: *O*(*x*): "*x* es una oveja"; *P*(*x*): "*x* es un pastor"; *T*(*x*,*y*): "*x* tiene *y*" ("*x* es propietario de *y*"); *N*(*x*): "*x* es negro"; *A*(*x*): "*x* es alegre".
a) Hay pastores que no tienen ovejas.
b) Si un pastor tiene ovejas, entonces tiene alguna negra.
c) Si un pastor no tiene ninguna oveja negra, entonces tiene alguna alegre.
d) Hay un pastor que sólo tiene ovejas negras (no tiene más que ovejas negras).
e) Hay un pastor que, ovejas, sólo tiene de negras.
f) Si se es pastor, hay que tener ovejas negras para tener ovejas alegres.
g) Hay una oveja que es propiedad de todos los pastores.
h) Hay un pastor que es el propietario de todas las ovejas negras.

8. Formalizad las frases que se dan a continuación, utilizando única y exclusivamente los predicados siguientes: *H*(*x*): "*x* es hombre"; *D*(*x*): "*x* es mujer"; *A*(*x*): "*x* es animal"; *G*(*x*): "*x* es perro"; *T*(*x*,*y*): "*x* tiene *y*" ("*x* es propietario de *y*"); *C*(*x*,*y*): "*x* e *y* están casados"; *N*(*x*): "*x* es noble"; *I*(*x*): "*x* es inteligente"; *a* (constante): "Ana"; *b* (constante): "Bobby"; *c* (constante): "Carlos".
a) Los perros nobles son animales inteligentes.
b) Si Carlos es propietario de Bobby, Ana también lo es.
c) Hay que ser propietario de un perro noble para ser un hombre inteligente.
d) Todos los animales nobles e inteligentes son propiedad de Carlos.
e) Si todos los propietarios de Bobby son inteligentes, entonces Ana está casada con algún hombre noble.
f) Si todos los perros fuesen nobles, cada animal inteligente sería propiedad de alguna mujer.
g) Cada hombre casado con una mujer inteligente es propietario de un perro noble.
h) Hay hombres y mujeres que son propietarios de animales, pero que no son inteligentes.
i) Ana es una mujer noble que es propietaria de todos los perros que no son propiedad de ningún hombre.
j) Todos los hombres casados con mujeres que no son propietarias de ningún animal inteligente tienen un perro noble.

9. Demostrad, utilizando las reglas de la deducción natural, que los siguientes razonamientos son correctos.

a) $\forall x\ (H(x) \to M(x)),\ \neg M(a)\ \therefore\ \neg H(a)$
b) $\forall x\ (H(x) \to M(x)),\ \exists y\ \neg M(y)\ \therefore\ \exists z\ \neg H(z)$
c) $\forall x\ (H(x) \vee D(x)),\ \neg D(a)\ \therefore\ H(a)$
d) $\forall x\ (H(x) \vee D(x)),\ \exists y\ \neg D(y)\ \therefore\ \exists z\ H(z)$
e) $\forall x\ (\neg M(x) \to \neg H(x)),\ \forall x\ H(x)\ \therefore\ \forall x\ M(x)$
f) $\forall x\ (H(x) \to M(x) \vee F(x)),\ \exists y\ (H(y) \wedge \neg M(y))\ \therefore\ \exists z\ F(z)$
g) $\forall x\ A(x)\ \therefore\ \neg\exists x\ \neg A(x)$
h) $\exists x\ \neg A(x)\ \therefore\ \neg\forall x\ A(x)$
i) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)\ \therefore\ \forall y\ \exists x\ P(x,y)$
j) $\forall x\ [P(x) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge T(x,y)) \to M(x)],\ G(b) \wedge T(a,b) \wedge \neg M(a)\ \therefore\ \exists z\ \neg P(z)$

10. Demostrad con las reglas de la deducción natural que los razonamientos siguientes son correctos.

a) $\forall x\ (C(x) \wedge N(x) \to P(x)),\ \exists x\ (C(x) \wedge O(x) \wedge \neg P(x)),\ \forall x\ (O(x) \to S(x))\ \therefore\ \exists x\ (C(x) \wedge S(x) \wedge \neg N(x))$
b) $\forall x\ (H(x) \to M(x)),\ \exists y\ \neg M(y)\ \therefore\ \neg\forall z\ H(z)$. Plantead la demostración como una reducción al absurdo e intentad hacerla sin utilizar las leyes de De Morgan.
c) $\forall x\ (H(x) \to M(x) \vee F(x)),\ \neg\exists x\ (H(x) \wedge M(x))\ \therefore\ \forall z\ (H(z) \to F(z))$. Atención, observad que la fórmula $\neg\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$ es la negación de una fórmula cuantificada existencialmente – la conectiva principal no es el cuantificador existencial. No sería correcto aplicar la regla **E**∃ para obtener, por ejemplo, $\neg(H(a) \wedge M(a))$. Plantead la demostración como una reducción al absurdo y utilizad las leyes de De Morgan y todas las equivalencias deductivas que os sean necesarias.
d) $\forall x\ (H(x) \vee D(x)),\ \neg\forall y\ D(y)\ \therefore\ \exists z\ H(z)$
e) $\exists x\ [C(x) \wedge P(x)] \to \forall x\ \exists y\ [M(x) \to C(y) \wedge F(x,y)],\ M(a),\ \forall z\ (C(z) \to \neg F(a,z))\ \therefore\ \neg\exists x\ (C(x) \wedge P(x))$
f) $\forall x\ [\exists y\ P(x,y) \to \exists z\ S(x,z)],\ \exists y\ \forall x\ P(x,y)\ \therefore\ \forall x\ \exists z\ S(x,z)$
g) $\forall x\ P(x,x)\ \therefore\ \forall x\ \exists y\ P(x,y)$. Plantead la demostración como una reducción al absurdo y utilizad las leyes de De Morgan tantas veces con sea necesario.
h) $\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ (M(y) \to A(x,y))],\ \neg\exists x\ [P(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))]\ \therefore\ \forall x\ (M(x) \to \neg C(x))$. Plantead la demostración como una reducción al absurdo y utilizad las leyes de De Morgan y otras equivalencias deductivas tantas veces como sea necesario.

11. Validad por deducción natural los razonamientos siguientes:

a) $\forall x\ \forall y\ [M(x) \wedge G(x,y) \to P(x,y)],\ \neg P(a,b),\ G(a,b)\ \therefore\ \neg M(a)$
b) $\exists x\ A(x) \to \exists y\ B(y),\ \forall x\ (B(x) \to C(x)),\ \neg\exists x\ C(x)\ \therefore\ \forall x\ \neg A(x)$
c) $\forall x\ A(x) \to \exists y\ B(y)\ \therefore\ \exists z\ (A(z) \to B(z))$
d) $\neg\exists x\ \{O(x) \wedge \exists y\ [G(y) \wedge A(x,y)]\},\ \forall x\ (P(x) \to G(x))\ \therefore\ \neg\exists x\ \{O(x) \wedge \exists y\ [P(y) \wedge A(x,y)]\}$

12. Dado el razonamiento $\forall x\ \exists y\ (Q(x) \to P(y,x))\ \therefore\ \exists y\ \forall x\ (Q(x) \to P(y,x))$:

a) Indicad si la interpretación $<\{1, 2\}, \{Q(1) = V, Q(2) = V, P(1,1) = V, P(1,2) = F, P(2,1) = F, P(2,2) = V\}, \varnothing>$ es o no un contraejemplo del mismo. ¿Puede afirmarse alguna cosa respecto de la validez del razonamiento?
b) Dad, si la hay, una interpretación en un dominio de un solo elemento que sea un contraejemplo.
c) Dad, si la hay, una interpretación en un dominio de dos elementos que **no** sea un contraejemplo.

13. Dado el razonamiento $\forall x\ P(x,x),\ \forall x\ \forall y\ (P(x,y) \to P(y,x))\ \therefore\ \exists x\ \forall y\ P(x,y)$, decid si alguna de estas tres interpretaciones es un contraejemplo:

I_1: $<\{1\}, \{P(1,1) = V\}, \varnothing>$
I_2: $<\{1,2\}, \{P(1,1) = V, P(1,2) = V, P(2,1) = F, P(2,2) = V\}, \varnothing>$
I_3: $<\{1,2\}, \{P(1,1) = V, P(1,2) = F, P(2,1) = F, P(2,2) = F\}, \varnothing>$
Considerando sólo estas tres interpretaciones, ¿hay algo que pueda afirmarse sobre la validez del razonamiento?

14. Dado el razonamiento $\forall x\ [P(x) \to \exists y\ Q(x,y)]\ ,\ \forall x\ \forall y\ \neg Q(x,y)\ \therefore\ \neg\exists x\ P(x)$, decid si alguna de estas tres interpretaciones es un contraejemplo:

I_1: $<\{1, 2\}, \{P(1) = F, P(2) = F, Q(1,1) = V, Q(1,2) = V, Q(2,1) = V, Q(2,2) = V\}, \varnothing>$
I_2: $<\{1, 2\}, \{P(1) = V, P(2) = V, Q(1,1) = V, Q(1,2) = V, Q(2,1) = F, Q(2,2) = F\}, \varnothing>$
I_3: $<\{1, 2\}, \{P(1) = V, P(2) = F, Q(1,1) = V, Q(1,2) = V, Q(2,1) = F, Q(2,2) = F\}, \varnothing>$
Considerando sólo estas tres interpretaciones, ¿hay algo que pueda afirmarse sobre la validez del razonamiento?

15. Dado el razonamiento $\forall x\ \forall y\ (A(x) \wedge R(x,y) \to C(y)),\ A(a),\ \exists x\ \exists y\ R(x,y)\ \therefore\ \exists x\ C(x)$, decid si alguna de estas tres interpretaciones es un contrajemplo:

I_1: $<\{1\}, \{A(1) = V, C(1) = V, R(1,1) = V\}, \{a = 1\}>$
I_2: $<\{1, 2\}, \{A(1) = V, A(2) = V, C(1) = V, C(2) = V, R(1,1) = F, R(1,2) = F, R(2,1) = F, R(2,2) = F\}, \{a = 1\}>$
I_3: $<\{1, 2\}, \{A(1) = V, A(2) = F, C(1) = F, C(2) = F, R(1,1) = F, R(1,2) = F, R(2,1) = V, R(2,2) = V\}, \{a = 1\}>$
Considerando sólo estas tres interpretaciones, ¿hay algo que pueda afirmarse sobre la validez del razonamiento?

16. Los razonamientos que se dan a continuación no son correctos. Formalizadlos y dad un contraejemplo para cada uno.

a) Los políticos son inteligentes. Algunos funcionarios también lo son. Por lo tanto, hay políticos que son funcionarios.
b) Hay mujeres responsables. Consiguientemente, todo el mundo es responsable.
c) Sólo los que se han examinado pueden ser aptos. Sólo los aptos pueden ser recomendados. De esto se desprende que todos los examinados son recomendados.
d) Todos los marcianos tienen un desintegrador. Los desintegradores no existen. Por lo tanto, hay marcianos que no tienen ningún desintegrador.

17. Encontrad la forma normal de Skolem de las fórmulas:

a) $\exists x \{ P(x) \wedge \neg\exists y [O(y) \wedge T(x,y)] \}$
b) $\forall x [P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)] \rightarrow \exists z R(z)$
c) $\exists x [P(x) \wedge \forall y Q(x,y)] \rightarrow \forall z \exists u R(z,u)$
d) $\forall x \{ P(x) \wedge \exists y [O(y) \wedge T(x,y)] \rightarrow \exists z [O(z) \wedge N(z) \wedge T(x,z)] \}$
e) $\forall x \{ P(x) \wedge \exists y [R(x,y) \wedge \forall z T(y,z)] \rightarrow \exists u Q(x,u) \}$
f) $\exists x \{ P(x) \wedge \forall y [T(x,y) \rightarrow O(y) \wedge N(y)] \}$

18. Al obtener la forma normal de Skolem de las siguientes fórmulas, se han cometido errores. Encontradlos y corregidlos (los números romanos indican los diferentes pasos que se dan).

a)
i) $\forall x \forall y [Q(x) \vee R(y) \rightarrow T(x,y)]$
ii) $\forall x \forall y [\neg(Q(x) \vee R(y)) \vee T(x,y)]$
iii) $\forall x \forall y [\neg Q(x) \vee \neg R(y) \vee T(x,y)]$

b)
i) $\exists y \forall x T(x,y) \wedge \exists z Q(z)$
ii) $\forall x T(x,a) \wedge Q(a)$

c)
i) $\exists y \forall x [T(x,y) \rightarrow \exists z Q(z,y)]$
ii) $\exists y \forall x [\neg T(x,y) \vee \exists z Q(z,y)]$
iii) $\forall x [\neg T(x,a) \vee Q(b,y)]$

d)
i) $\exists y [C(y) \wedge \forall x T(x,y)] \vee \forall z [R(z) \rightarrow \exists t T(t,z)]$
ii) $\exists y [C(y) \wedge \forall x T(x,y)] \vee \forall z [\neg R(z) \vee \exists t T(t,z))]$
iii) $[C(a) \wedge \forall x T(x,a)] \vee \forall z [\neg R(z) \vee T(f(z),z)]$
iv) $\forall x \forall z [(C(a) \wedge T(x,a)) \vee \neg R(z) \vee T(f(z),z)]$

e)
i) $\forall x [C(x) \wedge \exists y T(x,y) \rightarrow \forall z R(z)]$
ii) $\forall x [C(x) \wedge T(x,f(x)) \rightarrow \forall z R(z)]$
iii) $\forall x [\neg(C(x) \wedge T(x,f(x))) \vee \forall z R(z)]$
iv) $\forall x [\neg C(x) \vee \neg T(x,f(x)) \vee \forall z R(z)]$
v) $\forall x \forall z [\neg C(x) \vee \neg T(x,f(x)) \vee R(z)]$

f)
i) $\exists x [Q(x) \vee R(x)] \rightarrow \forall y \exists z T(y,z)$
ii) $\neg\exists x [Q(x) \vee R(x)] \vee \forall y \exists z T(y,z)$
iii) $\exists x \neg[Q(x) \vee R(x)] \vee \forall y \exists z T(y,z)$
iv) $\exists x [\neg Q(x) \wedge \neg R(x)] \vee \forall y \exists z T(y,z)$
v) $[\neg Q(a) \wedge \neg R(a)] \vee \forall y T(y,f(y))$
vi) $\forall y [(\neg Q(a) \wedge \neg R(a)) \vee T(y,f(y))]$
vii) $\forall y [(\neg Q(a) \vee T(y,f(y))) \wedge (\neg R(a) \vee T(y,f(y)))]$

g)
i) $\forall x \{R(x) \rightarrow \exists y \forall z [T(y,z) \rightarrow \exists t (S(x,t,z) \wedge Q(t))]\}$
ii) $\forall x \{ \neg R(x) \vee \exists y \forall z [\neg T(y,z) \vee \exists t (S(x,t,z) \wedge Q(t))]\}$
iii) $\forall x \{ \neg R(x) \vee \forall z [\neg T(f(x),z) \vee (S(x,g(z),z) \wedge Q(g(z)))]\}$
iv) $\forall x \forall z \{ \neg R(x) \vee \neg T(f(x),z) \vee [S(x,g(z),z) \wedge Q(g(z))]\}$
v) $\forall x \forall z \{[\neg R(x) \vee \neg T(f(x),z) \vee S(x,g(z),z)] \wedge [\neg R(x) \vee \neg T(f(x),z) \vee Q(g(z))]\}$

h)
i) $\forall x \forall y \{T(x,y) \rightarrow \exists z \exists t \forall u [S(z,t,u) \rightarrow \neg R(x) \wedge Q(y)]\}$
ii) $\forall x \forall y \{ \neg T(x,y) \vee \exists z \exists t \forall u [\neg S(z,t,u) \vee (\neg R(x) \wedge Q(y))]\}$
iii) $\forall x \forall y \{ \neg T(x,y) \vee \forall u [\neg S(f(x,y),f(x,y),u) \vee (\neg R(x) \wedge Q(y))]\}$
iv) $\forall x \forall y \forall u \{ \neg T(x,y) \vee [\neg S(f(x,y),f(x,y),u) \vee (\neg R(x) \wedge Q(y))]\}$
v) $\forall x \forall y \forall u \{[\neg T(x,y) \vee \neg S(f(x,y),f(x,y),u) \vee \neg R(x)] \wedge [\neg T(x,y) \vee \neg S(f(x,y),f(x,y),u) \vee Q(y)]\}$

19. Utilizad el método de resolución para descubrir si los siguientes razonamientos son o no correctos:

a) $\exists x \forall y P(x,y) \therefore \forall y \exists x P(x,y)$
b) $\forall x [P(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge T(x,y)) \rightarrow M(x)]$, $G(b) \wedge T(a,b)$, $\neg M(a) \therefore \neg\forall x P(x)$
c) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x (R(x) \rightarrow P(x)) \therefore \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$
d) $\forall x [\exists y P(x,y) \rightarrow \exists z S(x,z)]$, $\exists y \forall x P(x,y) \therefore \forall x \exists z S(x,z)$
e) $\exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y)$, $\forall x (B(x) \rightarrow C(x))$, $\neg\exists x C(x) \therefore \forall x \neg A(x)$
f) $\neg\exists x D(x)$, $\forall x [P(x) \rightarrow \exists y (D(y) \wedge T(x,y))] \therefore \exists x [P(x) \wedge \forall y \neg(D(y) \wedge T(x,y))]$
g) $\neg\exists x [P(x) \wedge \exists y (C(y) \wedge A(x,y))]$, $\exists x [P(x) \wedge \forall y (M(y) \rightarrow A(x,y))] \therefore \forall x (C(x) \rightarrow \neg M(x))$
h) $\forall x P(x,x)$, $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \therefore \exists x \forall y P(x,y)$

20. Formalizad los razonamientos siguientes y validadlos utilizando el método de resolución.

a) Ningún astrólogo es amigo de ningún científico. Todos los físicos son científicos. Como conclusión podemos decir que ningún astrólogo es amigo de ningún físico.

b) Hay pacientes que sienten admiración por todos los médicos. No hay ningún paciente que admire a ningún curandero. Así pues, no hay ningún médico que sea curandero.

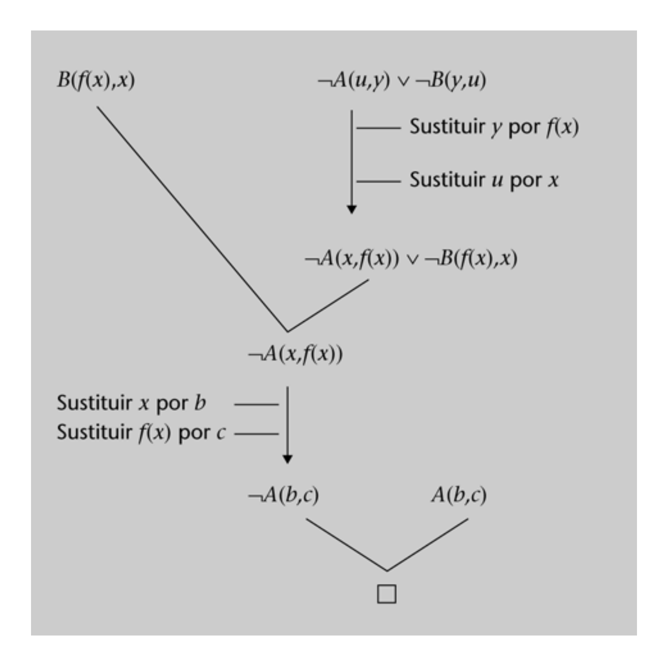
c) Alberto es feliz si a todos sus amigos les gusta la música. Hoy no se ve a Alberto demasiado feliz. Debe de ser que a algún amigo suyo no le gusta la música.

d) Todo número que puede dividirse por treinta y dos se puede dividir por cuatro. Los números divisibles por cuatro son pares. Los números que no son divisibles por dos no son pares. Setenta y tres no es divisible por dos. Consiguientemente, setenta y tres no puede dividirse por treinta y dos.

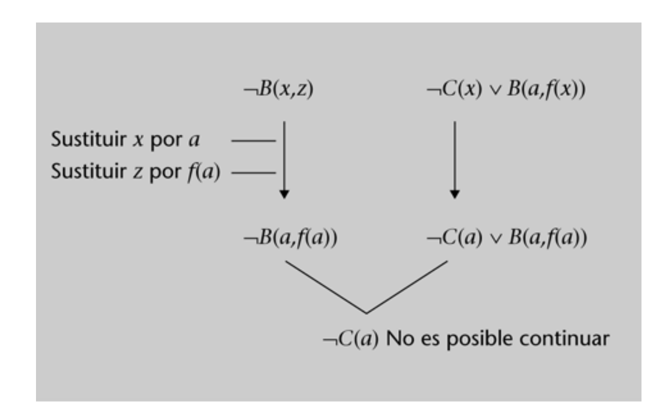
e) Si hay lingüistas, hay traductores. Si hay traductores, todos los escritores escriben novelas (cada escritor escribe alguna novela). Las novelas son escritos narrativos. Todas las novelas son escritas por algún escritor (cada novela es escrita por algún escritor). Pues bien, todos los escritores lingüistas escriben algún escrito narrativo.

21. Es posible que las siguientes aplicaciones del método de resolución contengan errores. Decid de qué errores se trata, si los hay, y cómo se arreglarían. Las cláusulas en negrita son el conjunto de apoyo.

a) $S = \{ \neg A(x,y) \lor \neg B(y,x), A(b,c), \mathbf{B(f(x),x)}, \mathbf{\neg A(x,f(x))} \}$



b) $S = \{ \neg C(x) \lor B(a,f(x)), C(b), \mathbf{\neg B(x,z)} \}$



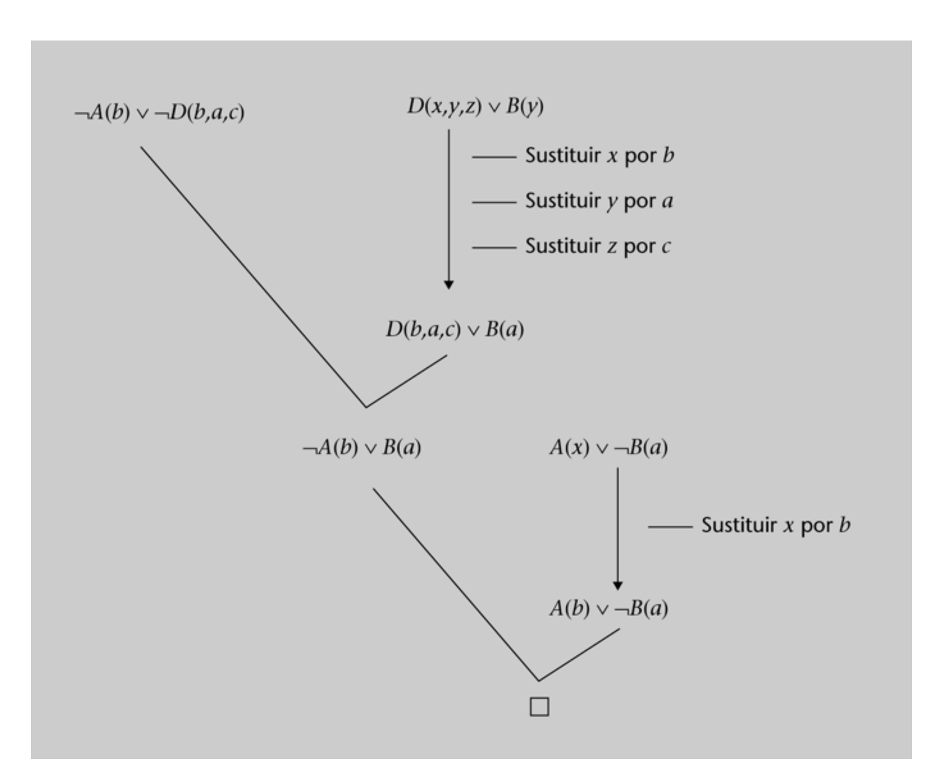
El razonamiento que da lugar al conjunto S no es correcto porque empezando con la cláusula del apoyo no puede llegarse a □ y las premisas son consistentes porque del conjunto $\{ \neg C(x) \lor B(a,f(x)), C(b) \}$ no puede obtenerse la cláusula vacía.

c) { $B(x) \vee \neg F(x,f(x))$, $\neg A(y) \vee \neg B(y) \vee \neg F(x,f(x))$, $A(x)$, $\neg \mathbf{A(a)} \vee \mathbf{F(c,z)}$ }

$\neg A(a) \vee F(c,z)$ $B(x) \vee \neg F(x,f(x))$
Sustituir x por c
Sustituir z por $f(c)$
$\neg A(a) \vee F(c,f(c))$ $B(c) \vee \neg F(c,f(c))$
$\neg A(a) \vee B(c)$
$\neg A(y) \vee \neg B(y) \vee \neg F(x,f(x))$
Sustituir y por c
$\neg A(y) \vee \neg B(c) \vee \neg F(x,f(x))$
$\neg A(a) \vee \neg A(y) \vee \neg F(x,f(x))$ $\neg A(a) \vee F(c,z)$
Sustituir x por c
Sustituir z por $f(c)$
$\neg A(a) \vee \neg A(y) \vee \neg F(c,f(c))$ $\neg A(a) \vee F(c,f(c))$
$\neg A(a) \vee \neg A(y) \vee \neg A(a)$
Simplificando
$\neg A(a) \vee \neg A(y)$ No es posible continuar

No se puede continuar porque la cláusula $A(x)$ no puede resolverse contra $\neg A(a) \vee \neg A(y)$, ya que x e y son dos variables diferentes y por lo tanto la discrepancia es irresoluble.

d) {$A(x) \vee \neg B(a)$, $D(x,y,z) \vee B(y)$, $C(u) \vee \neg B(u)$, $\neg C(a)$, $A(z)$, $\neg \mathbf{A(b)} \vee \neg \mathbf{D(b,a,c)}$}



Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1.

a) Correcta, porque *T* es un predicado ternario, *a* y *b* son constantes y *x* es una variable.
b) Incorrecta, porque *a* y *b* son constantes y no fórmulas.
c) Incorrecta, porque $\forall y\ Q(y)$ no es un término.
d) Correcta, porque $P(x,y)$ es una fórmula atómica y $\forall y\ P(x,y)$ y $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ son fórmulas correctas.
e) Correcta.
f) Correcta.
g) Incorrecta, porque el cuantificador universal, de hecho cualquier cuantificador, debe preceder una variable y en $\forall P(z,z)$ no lo hace.
h) Incorrecta, porque la conjunción debe "conectar" dos fórmulas y $\forall x$ no es una fórmula.
i) Incorrecta, porque igual que en el caso anterior, $\forall z$ no es una fórmula y, en consecuencia, tampoco lo es $\neg\forall z$; entonces, $\neg\forall x\ \neg\forall z$ tampoco es ninguna fórmula.
j) Correcta, porque $P(x,z)$ es una fórmula; entonces: $\forall z\ P(x,z)$ también lo es. Dado que $\forall z\ P(x,z)$ es una fórmula, $\neg\forall z\ P(x,z)$ también lo es. Entonces $\forall x\ \neg\forall z\ P(x,z)$ es una fórmula y, finalmente, $\neg\forall x\ \neg\forall z\ P(x,z)$ también lo es.
k) Incorrecta, porque las constantes no se pueden cuantificar.

2. Para esta solución se utilizarán subíndices para indicar qué variables son "la misma variable". ¡Atención!, la utilización de subíndices no se contempla en la escritura de fórmulas. Se trata sólo de un recurso utilizado en este ejercicio con el propósito de hacer su solución más clara.
a) $\forall x_1\ Q(x_1) \wedge \exists y_2\ P(x_3,y_2)$. La variable x_3 es libre.
b) $\exists x_1\ Q(a) \rightarrow \forall y_2\ P(x_3,y_2)$. La variable x_3 es libre.
c) $\forall x_1(\forall y_2\ T(x_1,y_2,z_3) \wedge \forall x_4\ Q(x_4) \rightarrow \exists z_5\ P(x_1,z_5))$. La variable z_3 es libre.
d) $\forall x_1\ \exists y_2\ (\exists z_3\ R(x_1,y_2,z_3,t_4) \vee \forall y_5\ \neg T(x_1,y_5,t_4) \vee Q(y_2))$. La variable t_4 es libre.
e) $\neg\exists x_1\ (\forall x_2\ Q(x_2) \wedge P(x_1,x_1)) \vee \neg T(x_3,x_3,x_3)$. La variables x_3 es libre.
f) $\forall x_1\ \exists y_2\ \forall z_3\ (\forall t_4\ R(x_1,y_2,z_3,t_4) \rightarrow \exists x_5\ P(x_5,t_6))$. La variable t_6 es libre.
g) $\forall x_1\ (\forall x_2\ P(x_2,x_2) \vee \neg Q(a) \rightarrow \forall y_3\ \neg R(a,x_1,a,y_3) \wedge T(y_4,y_4,x_1))$. La variable y_4 es libre.

3.

a) $\forall x\ [P(x) \vee T(x) \rightarrow G(x) \wedge N(x)]$.
También es correcto: $\forall x\ [P(x) \rightarrow G(x) \wedge N(x)] \wedge \forall y\ [T(y) \rightarrow G(y) \wedge N(y)]$.
Son deductivamente equivalentes.
b) $\exists x\ [A(x) \wedge (M(x) \rightarrow C(x))]$
O también: $\exists x\ [A(x) \wedge (\neg C(x) \rightarrow \neg M(x))]$.
Son deductivamente equivalentes. Observad que la condición que se expresa es de necesidad.
c) $\forall x\ [A(x) \rightarrow (\neg F(x) \rightarrow \neg S(x))]$
O también: $\forall x\ [A(x) \rightarrow (S(x) \rightarrow F(x))]$
O también: $\neg\exists x\ [A(x) \wedge \neg F(x) \wedge S(x)]$
Las tres son deductivamente equivalentes.
d) $\neg\forall x\ [R(x) \wedge C(x) \wedge E(x)] \wedge \neg\forall x\ [R(x) \rightarrow C(x) \wedge E(x)]$
O también: $\exists x\ [\neg R(x) \vee \neg C(x) \vee \neg E(x)] \wedge \exists x\ [R(x) \wedge \neg(C(x) \wedge E(x))]$
Son equivalentes.
e) $\neg\forall x\ [C(x) \wedge B(x) \rightarrow F(x) \wedge T(x)]$
O también: $\exists x\ [C(x) \wedge B(x) \wedge \neg(F(x) \wedge T(x))]$
Son equivalentes.
f) $\neg\forall x\ [H(x) \wedge D(x) \rightarrow C(x)]$,
O también: $\exists x\ [H(x) \wedge D(x) \wedge \neg C(x)]$
Son equivalentes.

4.

a) $H(x)$: "*x* es honrado"

$$\forall x\ H(x)$$

b) $P(x)$: "*x* es una persona"; $H(x)$: "*x* es honrado"

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow H(x))$$

c) $H(x)$: "*x* es honrado"

$$\exists x\ H(x)$$

d) $P(x)$: "*x* es una persona"; $H(x)$: "*x* es honrado"

$$\exists x\ (P(x) \wedge H(x))$$

e) $H(x)$: "x es honrado"; a: "Juan"

$$H(a)$$

f) $H(x)$: "x es honrado"; a: "Juan"

$$H(a)$$

Observad que esta formalización no "afirma" que Juan sea una persona. Si creemos que sí que lo es y que hay que explicitarlo, entonces: $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; a: "Juan".

$$P(a) \wedge H(a)$$

g) $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x trata con y"

$$\forall x\ (H(x) \rightarrow \forall y\ T(x,y))$$

h) $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x trata con y"

$$\forall x\ (P(x) \wedge H(x) \rightarrow \forall y\ (P(y) \rightarrow T(x,y)))$$

Observad que hemos entendido que "todo el mundo" quiere decir "todas las personas".

i) $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x trata con y"

$$\forall x\ (H(x) \rightarrow \forall y\ (T(x,y) \rightarrow H(y)))$$

Observad que hemos entendido que "gente" es sinónimo de "personas".

j) $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x se trata con y"

$$\forall x\ (P(x) \wedge H(x) \rightarrow \forall y\ (T(x,y) \rightarrow P(y) \wedge H(y)))$$

k) $H(x)$: "x es honrado". $T(x,y)$: "x se trata con y"

$$\exists x\ (H(x) \wedge \forall y\ (T(x,y) \rightarrow H(y)))$$

l) $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x se trata con y"

$$\exists x\ (\neg H(x) \wedge \neg\exists y\ T(x,y))$$

m) $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x se trata con y"

$$\exists x\ (P(x) \wedge \neg H(x) \wedge \neg\exists y\ (P(y) \wedge T(x,y)))$$

Observad que hemos entendido que "nadie" quiere decir "ninguna persona".

n) $T(x,y)$: "x trata a y": a: "Juan"; b: "María"

$$T(a,b) \wedge T(b,a)$$

o) $T(x,y)$: "x trata a y"; a: "Juan"

$$\exists x\ T(a,x)$$

p) $P(x)$: "x es una persona"; $H(x)$: "x es honrado"; $T(x,y)$: "x trata a y"; a: "Juan"

$$\exists x\ (P(x) \wedge H(x) \wedge T(a,x))$$

Esta formalización no "afirma" que Juan sea una persona, ni mucho menos que sea honrado. Si quisiéramos mantener la misma semántica del punto anterior habría que formalizar:

$$\exists x\ (P(x) \wedge H(x) \wedge T(a,x)) \wedge P(a) \wedge H(a)$$

5.

a) $\exists x\ B(x) \wedge \exists y\ N(y) \wedge \neg\exists z\ (B(z) \wedge N(z))$

Todas las formalizaciones siguientes también serían correctas (son equivalentes a la anterior):
$\exists x\ B(x) \wedge \exists x\ N(x) \wedge \neg\exists x\ (B(x) \wedge N(x))$,
$\exists x\ B(x) \wedge \exists y\ N(y) \wedge \forall z\ (\neg B(z) \vee \neg N(z))$ y
$\exists x\ B(x) \wedge \exists y\ N(y) \wedge \forall z\ (B(z) \rightarrow \neg N(z))$

b) $\forall x\ (H(x) \vee D(x) \rightarrow T(x))$
También serían correctas:
$\forall x\ (H(x) \rightarrow T(x)) \wedge \forall y\ (D(y) \rightarrow T(y))$ y
$\forall x\ (H(x) \rightarrow T(x)) \wedge \forall x\ (D(x) \rightarrow T(x))$.
En cambio, no sería correcta: $\forall x\ (H(x) \wedge D(x) \rightarrow T(x))$.
c) $\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \exists y\ (R(y) \wedge Q(y)) \wedge \neg\forall z\ (R(z) \rightarrow Q(z))$
También sería correcta:
$\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \exists y\ (R(y) \wedge Q(y)) \wedge \exists z\ (R(z) \wedge \neg Q(z))$.
Observad que "Sólo algunos números reales son racionales" se ha interpretado como "Hay reales que son racionales, pero no todos los reales son racionales".
d) Observad que la forma más sencilla de formalizar esta frase es negar la formalización de "Todos los productos caros son de calidad":

$$\neg\forall x\ (P(x) \wedge C(x) \rightarrow Q(x))$$

También sería correcto: $\exists x\ (P(x) \wedge C(x) \wedge \neg Q(x))$.
e) $\forall x\ (S(x) \rightarrow I(x))$. También sería correcto: $\forall x\ (\neg I(x) \rightarrow \neg S(x))$.
Observad que la frase expresa una condición necesaria: ser muy inteligente es necesario para ser socio del club.
f) $\forall x\ (F(x) \rightarrow T(x))$
g) $\forall x\ [E(x) \wedge F(x) \rightarrow \exists y\ (A(y) \wedge T(x,y))]$
h) $\neg\exists x\ S(x) \rightarrow \neg\exists y\ (I(y) \wedge F(y))$
También serían correctas: $\neg\exists x\ S(x) \rightarrow \neg\exists x\ (I(x) \wedge F(x))$ y $\neg\exists x\ S(x) \rightarrow \forall y\ (I(y) \rightarrow \neg F(y))$.
Observad que la frase dada es una implicación y que cada parte de la implicación es una fórmula cuantificada.
i) $\exists x\ [E(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow A(x,y))] \wedge \neg\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ (E(y) \rightarrow A(x,y))]$
j) $\forall x\ [A(x) \wedge \exists y\ (Z(y) \wedge V(x,y)) \rightarrow N(x)]$
k) $\exists x\ \{ P(x) \wedge \forall y[O(y) \wedge \exists z\ (C(z) \wedge A(y,z)) \rightarrow B(x,y)] \}$
l) $\exists x\ \{ P(x) \wedge \forall y\ [O(y) \wedge \forall z\ (C(z) \rightarrow A(y,z)) \rightarrow B(x,y)] \}$
m) $\forall x\ \{ P(x) \rightarrow \exists y\ [S(y) \wedge T(x,y) \wedge \forall z\ (V(z,x) \rightarrow D(z,y))] \}$

6.

a) $C(x)$: "x es catalán"; $M(x)$: "x come escudella"

$$\forall x\ (M(x) \rightarrow C(x))$$

También sería correcto: $\forall x\ (\neg C(x) \rightarrow \neg M(x))$.
Dado que la frase expresa una condición necesaria (hay que ser catalán para comer escudella), la formalización $\forall x\ (C(x) \rightarrow M(x))$ **no** sería correcta.
b) $E(x)$: "x es una empresa"; $A(x)$: "x es un administrativo"; $P(x)$: "x es poco honrado"; $T(x,y)$: "x trabaja *en* y"

$$\forall x\ [E(x) \rightarrow \exists y\ (A(y) \wedge P(y) \wedge T(y,x))]$$

También habría sido correcto no distinguir entre "ser administrativo" y "ser poco honrado", utilizando un solo predicado $H(x)$: "x es un administrativo poco honrado". Entonces, la formalización sería:

$$\forall x\ [E(x) \rightarrow \exists y\ (H(y) \wedge T(y,x))]$$

c) $D(x)$: "x es un diputado"; $E(x)$: "x es un escaño"; $S(x,y)$: "x se sienta en y"

$$\forall x\ [D(x) \rightarrow \exists y\ (E(y) \wedge S(x,y))]$$

d) $D(x)$: "x es un diputado"; $E(x)$: "x es un escaño"; $S(x,y)$: "x se sienta en y" (o "x se ha sentado en y")

$$\exists x\ [E(x) \wedge \forall y\ (D(y) \rightarrow S(y,x))]$$

e) $P(x)$: "x es un periodista"; $S(x)$: "x es un secreto"; $F(x)$: "x es famoso"; $T(x,y)$: "x es de y"; $C(x,y)$: "x conoce y"

$$\exists x\ \{ P(x) \wedge \forall y\ [S(y) \wedge \exists z\ (F(z) \wedge T(y,z)) \rightarrow C(x,y)] \}$$

También habría sido correcto prescindir de los predicados $S(x)$ y $F(x)$ con el significado que se les ha otorgado y haber utilizado $M(x)$: "x es un secreto de un famoso". Entonces, la formalización habría sido: $\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ (M(y) \rightarrow C(x,y))]$

f) $I(x)$: "x es un informático"; $E(x,y)$: "x entiende y"

$$\forall x\ [I(x) \rightarrow \forall y\ (E(x,y) \rightarrow I(y))]$$

g) $M(x)$: "x se encuentra mal"; $H(x)$: "x se pone de mal humor"

$$\exists x\, M(x) \to \forall y\, H(y)$$

También es correcto: $\exists x M(x) \to \forall x H(x)$.

h) $C(x)$: "x es miembro de la pandilla"; $M(x)$: "x se encuentra mal"; $H(x)$: "x se pone de mal humor"

$$\exists x\, (C(x) \wedge M(x)) \to \forall y\, (C(y) \to H(y)).$$

También es correcto: $\exists x\, (C(x) \wedge M(x)) \to \forall x\, (C(x) \to H(x))$.
Observad que hemos interpretado que "Todos se ponen de mal humor" quiere decir "Todos los miembros de la pandilla".

7.
a) $\exists x\, \{ P(x) \wedge \neg\exists y\, [O(y) \wedge T(x,y)] \}$
b) $\forall x\, \{ P(x) \to [\exists y\, (O(y) \wedge T(x,y)) \to \exists z\, (O(z) \wedge N(z) \wedge T(x,z))] \}$
c) $\forall x\, \{ P(x) \to [\neg\exists y\, (O(y) \wedge N(y) \wedge T(x,y)) \to \exists z\, (O(z) \wedge A(z) \wedge T(x, z))] \}$
d) $\exists x\, \{ P(x) \wedge \forall y\, [T(x, y) \to O(y) \wedge N(y)] \}$
e) $\exists x\, \{ P(x) \wedge \forall y\, [T(x, y) \wedge O(y) \to N(y)] \}$
f) $\forall x\, \{ P(x) \to [\neg\exists y\, (O(y) \wedge N(y) \wedge T(x,y)) \to \neg\exists z\, (O(z) \wedge A(z) \wedge T(x, z))] \}$
g) $\exists x\, \{ O(x) \wedge \forall y\, [P(y) \to T(y,x)] \}$
h) $\exists x\, \{ P(x) \wedge \forall y\, [O(y) \wedge N(y) \to T(x,y)] \}$

8.
a) $\forall x\, [G(x) \wedge N(x) \to A(x) \wedge I(x)]$
b) $T(c,b) \to T(a,b)$
c) $\forall x\, [H(x) \wedge I(x) \to \exists y\, (G(y) \wedge N(y) \wedge T(x,y))]$
O también: $\forall x\, [\neg\exists y\, (G(y) \wedge N(y) \wedge T(x,y)) \to \neg(H(x) \wedge I(x))]$
d) $\forall x\, [A(x) \wedge N(x) \wedge I(x) \to T(c,x)]$
e) $\forall x\, [T(x,b) \to I(x)] \to \exists x\, [H(x) \wedge N(x) \wedge C(a,x)]$
f) $\forall x\, [G(x) \to N(x)] \to \forall x\, [A(x) \wedge I(x) \to \exists y\, (D(y) \wedge T(y,x))]$
g) $\forall x\, [H(x) \wedge \exists y\, (D(y) \wedge I(y) \wedge C(x,y)) \to \exists z\, (G(z) \wedge T(x,z) \wedge N(z))]$
h) $\exists x\, [H(x) \wedge \exists y\, (A(y) \wedge T(x,y)) \wedge \neg I(x)] \wedge \exists x\, [D(x) \wedge \exists y\, (A(y) \wedge T(x,y)) \wedge \neg I(x)]$, o también: $\exists x\, [(H(x) \vee D(x)) \wedge \exists y\, (A(y) \wedge T(x,y)) \wedge \neg I(x)]$
i) $N(a) \wedge D(a) \wedge \forall x\, [G(x) \wedge \neg\exists y\, (H(y) \wedge T(y,x)) \to T(a,x)]$
j) $\forall x\, \{ H(x) \wedge \exists y\, [D(y) \wedge \neg\exists z\, (A(z) \wedge I(z) \wedge T(y,z)) \wedge C(x,y)] \to \exists t\, (G(t) \wedge N(t) \wedge T(x,t)) \}$

9.
a)

(1)	$\forall x\, (H(x) \to M(x))$	**P**
(2)	$\neg M(a)$	**P**
(3)	$H(a) \to M(a)$	**E**$\forall$ 1
(4)	$\neg H(a)$	**MT** 2, 3

Observad que el paso 3 es correcto porque x está cuantificada universalmente y, por lo tanto, puede ser sustituida por cualquier término.

b)

(1)	$\forall x\, (H(x) \to M(x))$	**P**
(2)	$\exists y\, \neg M(y)$	**P**
(3)	$\neg M(a)$	**E**$\exists$ 2
(4)	$H(a) \to M(a)$	**E**$\forall$ 1
(5)	$\neg H(a)$	**MT** 3, 4
(6)	$\exists z\, \neg H(z)$	**I**$\exists$ 5

Observad que en el paso 4 se elige la constante a para eliminar el cuantificador universal porque con cualquier otro término no sería posible aplicar la regla **MT** en el paso 5.

c)

(1)	$\forall x\, (H(x) \vee D(x))$	**P**
(2)	$\neg D(a)$	**P**
(3)	$H(a) \vee D(a)$	**E**$\forall$ 1
(4)	$H(a)$	**SD** 2, 3

d)

(1)	$\forall x\ (H(x) \vee D(x))$	**P**
(2)	$\exists y\ \neg D(y)$	**P**
(3)	$\neg D(a)$	**E**$\exists$ 2
(4)	$H(a) \vee D(a)$	**E**$\forall$ 1
(5)	$H(a)$	**SD** 3, 4
(6)	$\exists z\ H(z)$	**I**$\exists$ 5

Observad que hay que eliminar primero el cuantificador existencial y después el universal. La siguiente demostración **no** sería correcta:

(1)	$\forall x\ (H(x) \vee D(x))$	**P**
(2)	$\exists y\ \neg D(y)$	**P**
(3)	$H(a) \vee D(a)$	**E**$\forall$ 1
(4)	$\neg D(a)$	**E**$\exists$ 2 ¡incorrecto!
(5)	$H(a)$	**SD** 3, 4
(6)	$\exists z\ H(z)$	**I**$\exists$ 5

En este caso el paso 4 es incorrecto, porque se utiliza una constante que ya ha aparecido antes.

e)

(1)	$\forall x\ (\neg M(x) \to \neg H(x))$	**P**
(2)	$\forall x\ H(x)$	**P**
(3)	$\neg M(z) \to \neg H(z)$	**E**$\forall$ 1
(4)	$H(z)$	**E**$\forall$ 2
(5)	$\neg\neg M(z)$	**MT** 3, 4
(6)	$M(z)$	**E**$\neg$ 5
(7)	$\forall x\ M(x)$	**I**$\forall$ 6

Observad que el paso 7 es correcto porque la variable z era arbitraria: en el paso 3, z ha sido utilizada para eliminar el cuantificador universal de 1, pero se podría haber utilizado cualquier otro término. Observad también que en el paso 4 se ha utilizado la misma variable que en el paso anterior para poder aplicar después la regla **MT**.

f)

(1)	$\forall x\ (H(x) \to M(x) \vee F(x))$	**P**
(2)	$\exists y\ (H(y) \wedge \neg M(y))$	**P**
(3)	$H(a) \wedge \neg M(a)$	**E**$\exists$ 2
(4)	$H(a) \to M(a) \vee F(a)$	**E**$\forall$ 1
(5)	$H(a)$	**E**$\wedge$ 3
(6)	$M(a) \vee F(a)$	**E**$\to$ 4, 5
(7)	$\neg M(a)$	**E**$\wedge$ 3
(8)	$F(a)$	**SD** 6, 7
(9)	$\exists z\ F(z)$	**I**$\exists$ 8

Observad que, en lo que respecta al orden en el que los cuantificadores se han eliminado, se ha seguido la misma estrategia que en el punto **d**.

g)

(1)	$\forall x\ A(x)$		**P**
(2)		$\exists x\ \neg A(x)$	**H**
(3)		$\neg A(a)$	**E**$\exists$ 2
(4)		$A(a)$	**E**$\forall$ 1
(5)	$\neg\exists x\ \neg A(x)$		**I**$\neg$ 2, 3, 4

h)

(1)	$\exists x\ \neg A(x)$		**P**
(2)		$\forall x\ A(x)$	**H**
(3)		$\neg A(a)$	**E**$\exists$ 1
(4)		$A(a)$	**E**$\forall$ 2
(5)	$\neg\forall x\ A(x)$		**I**$\neg$ 2, 3, 4

i)

(1)	$\exists x\ \forall y\ P(x,y)$	**P**
(2)	$\forall y\ P(a,y)$	**E**$\exists$ 1
(3)	$P(a,t)$	**E**$\forall$ 2
(4)	$\exists x\ P(x,t)$	**I**$\exists$ 3
(5)	$\forall y\ \exists x\ P(x,y)$	**I**$\forall$ 4

j)

(1)	$\forall x\ [P(x) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge T(x,y)) \rightarrow M(x)]$	**P**
(2)	$G(b) \wedge T(a,b) \wedge \neg M(a)$	**P**
(3)	$P(a) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge T(a,y)) \rightarrow M(a)$	**E**$\forall$ 1
(4)	$\neg M(a)$	**E**$\wedge$ 2
(5)	$\neg(P(a) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge T(a,y)))$	**MT** 3, 4
(6)	$\neg P(a) \vee \neg\exists y\ (G(y) \wedge T(a,y))$	**ED** 5
(7)	$G(b) \wedge T(a,b)$	**E**$\wedge$ 2
(8)	$\exists y\ (G(y) \wedge T(a,y))$	**I**$\exists$ 7
(9)	$\neg P(a)$	**SD** 6, 8
(10)	$\exists z\ \neg P(z)$	**I**$\exists$ 9

Tened presente que, antes de eliminar un cuantificador universal, es necesario reflexionar sobre qué término (¿una variable?, ¿una constante?, ¿qué constante?) hay que utilizar para su eliminación. En este caso, ha sido necesario utilizar la constante *a* para, por ejemplo, poder disponer de $M(a)$ y luego aplicar la regla **MT**.

10.
a)

(1)	$\forall x\ (C(x) \wedge N(x) \rightarrow P(x))$	**P**
(2)	$\exists x\ (C(x) \wedge O(x) \wedge \neg P(x))$	**P**
(3)	$\forall x\ (O(x) \rightarrow S(x))$	**P**
(4)	$C(a) \wedge O(a) \wedge \neg P(a)$	**E**$\exists$ 2
(5)	$C(a) \wedge N(a) \rightarrow P(a)$	**E**$\forall$ 1
(6)	$\neg P(a)$	**E**$\wedge$ 4
(7)	$\neg(C(a) \wedge N(a))$	**MT** 5, 6
(8)	$\neg C(a) \vee \neg N(a)$	**ED** 7
(9)	$C(a)$	**E**$\wedge$ 4
(10)	$\neg N(a)$	**SD** 8, 9
(11)	$O(a) \rightarrow S(a)$	**E**$\forall$ 3
(12)	$O(a)$	**E**$\wedge$ 4
(13)	$S(a)$	**E**$\rightarrow$ 11, 12
(14)	$C(a) \wedge S(a) \wedge \neg N(a)$	**I**$\wedge$ 9, 10, 13
(15)	$\exists x\ (C(x) \wedge S(x) \wedge \neg N(x))$	**I**$\exists$ 14

b)

(1)	$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$		**P**
(2)	$\exists y\ \neg M(y)$		**P**
(3)		$\forall z\ H(z)$	**H**
(4)		$\neg M(a)$	**E**$\exists$ 2
(5)		$H(a) \rightarrow M(a)$	**E**$\forall$ 1
(6)		$H(a)$	**E**$\forall$ 3
(7)		$M(a)$	**E**$\rightarrow$ 5, 6
(8)		$\neg M(a)$	**it** 4
(9)	$\neg\forall z\ H(z)$		**I**$\neg$ 3, 7, 8

c)

(1)	$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x) \vee F(x))$		**P**
(2)	$\neg\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$		**P**
(3)		$\neg\forall z\ (H(z) \rightarrow F(z))$	**H**
(4)		$\exists z\ \neg(H(z) \rightarrow F(z))$	**ED** 3
(5)		$\neg(H(a) \rightarrow F(a))$	**E**$\exists$ 4
(6)		$H(a) \wedge \neg F(a)$	**ED** 5
(7)		$H(a) \rightarrow M(a) \vee F(a)$	**E**$\forall$ 1
(8)		$H(a)$	**E**$\wedge$ 6
(9)		$M(a) \vee F(a)$	**E**$\rightarrow$ 7, 8
(10)		$\neg F(a)$	**E**$\wedge$ 6
(11)		$M(a)$	**SD** 9, 10
(12)		$H(a) \wedge M(a)$	**I**$\wedge$ 8, 11
(13)		$\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$	**I**$\exists$ 12
(14)		$\neg\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$	**it** 2
(15)	$\neg\neg\forall z\ (H(z) \rightarrow F(z))$		**I**$\neg$ 3, 13, 14
(16)	$\forall z\ (H(z) \rightarrow F(z))$		**E**$\neg$ 15

La siguiente demostración, que no es una reducción al absurdo, también sería correcta:

(1)	$\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x) \vee F(x))$			**P**
(2)	$\neg\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$			**P**
(3)	$\forall x\ \neg(H(x) \wedge M(x))$			**ED** 2
(4)	$\neg(H(u) \wedge M(u))$			**E**$\forall$ 3
(5)	$\neg H(u) \vee \neg M(u)$			**ED** 4
(6)		$\neg H(u)$		**H**
(7)		$\neg H(u) \vee F(u)$		**I**$\vee$ 6
(8)		$H(u) \rightarrow F(u)$		**ED** 7
(9)		$\neg M(u)$		**H**
(10)		$H(u) \rightarrow M(u) \vee F(u)$		**E**$\forall$ 1
(11)			$\neg F(u)$	**H**
(12)			$\neg M(u) \wedge \neg F(u)$	**I**$\wedge$ 9, 11
(13)			$\neg(M(u) \vee F(u))$	**ED** 12
(14)			$\neg H(u)$	**MT** 10, 13
(15)		$\neg F(u) \rightarrow \neg H(u)$		**I**$\rightarrow$ 11, 14
(16)		$H(u) \rightarrow F(u)$		**ED** 15
(17)	$H(u) \rightarrow F(u)$			**E**$\vee$ 5, 8, 16
(18)	$\forall z\ (H(z) \rightarrow F(z))$			**I**$\forall$ 17

d)

(1)	$\forall x\ (H(x) \vee D(x))$	**P**
(2)	$\neg\forall y\ D(y)$	**P**
(3)	$\exists y\ \neg D(y)$	**ED** 2
(4)	$\neg D(a)$	**E**$\exists$ 3
(5)	$H(a) \vee D(a)$	**E**$\forall$ 1
(6)	$H(a)$	**SD** 4, 5
(7)	$\exists z\ H(z)$	**I**$\exists$ 6

e)

(1)	$\exists x\ [C(x) \wedge P(x)] \rightarrow \forall x\ \exists y\ [M(x) \rightarrow C(y) \wedge F(x,y)]$		**P**
(2)	$M(a)$		**P**
(3)	$\forall z\ (C(z) \rightarrow \neg F(a,z))$		**P**
(4)		$\exists x\ (C(x) \wedge P(x))$	**H**
(5)		$\forall x\ \exists y\ [M(x) \rightarrow C(y) \wedge F(x,y)]$	**E**→ 1, 4
(6)		$\exists y\ [M(a) \rightarrow C(y) \wedge F(a,y)]$	**E**∀ 5
(7)		$M(a) \rightarrow C(b) \wedge F(a,b)$	**E**∃ 6
(8)		$M(a)$	**it** 2
(9)		$C(b) \wedge F(a,b)$	**E**→ 7, 8
(10)		$C(b) \rightarrow \neg F(a,b)$	**E**∀ 3
(11)		$C(b)$	**E**∧ 9
(12)		$\neg F(a,b)$	**E**→ 10, 11
(13)		$F(a,b)$	**E**∧ 9
(14)	$\neg\exists x\ (C(x) \wedge P(x))$		**I**¬ 4, 12, 13

Observad lo siguiente:

- La primera premisa es una implicación (→ es su conectiva principal). Por este motivo es lícito aplicarle la regla **E**→ cuando se dispone de su antecedente (paso 5).

- La fórmula $\forall x\ \exists y\ [M(x) \rightarrow C(y) \wedge F(x,y)]$ está cuantificada universalmente (es el resultado de cuantificar universalmente una fórmula cuantificada existencialmente). Por esta razón el cuantificador que se elimina es el universal (paso 6). Después puede aplicarse la regla **E**∃ a este resultado. No sería correcto pasar de $\forall x\ \exists y\ [M(x) \rightarrow C(y) \wedge F(x,y)]$ a $\forall x\ [M(x) \rightarrow C(b) \wedge F(x,b)]$ por eliminación del cuantificador existencial.

- En el paso 6, la constante utilizada al aplicar **E**∃ ha sido b. La constante a no podía utilizarse porque ya había aparecido antes.

f)

(1)	$\forall x\ [\exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists z\ S(x,z)]$	**P**
(2)	$\exists y\ \forall x\ P(x,y)$	**P**
(3)	$\forall x\ P(x,a)$	**E**∃ 2
(4)	$P(t,a)$	**E**∀ 3
(5)	$\exists y\ P(t,y)$	**I**∃ 4
(6)	$\exists y\ P(t,y) \rightarrow \exists z\ S(t,z)$	**E**∀ 1
(7)	$\exists z\ S(t,z)$	**E**→ 5, 6
(8)	$\forall x\ \exists z\ S(x,z)$	**I**∀ 7

g)

(1)	$\forall x\ P(x,x)$		**P**
(2)		$\neg\forall x\ \exists y\ P(x,y)$	**H**
(3)		$\exists x\ \neg\exists y\ P(x,y)$	**ED** 2
(4)		$\exists x\ \forall y\ \neg P(x,y)$	**ED** 3
(5)		$\forall y\ \neg P(a,y)$	**E**∃ 4
(6)		$\neg P(a,a)$	**E**∀ 5
(7)		$P(a,a)$	**E**∀ 1
(8)	$\neg\neg\forall x\ \exists y\ P(x,y)$		**I**¬ 2, 6, 7
(9)	$\forall x\ \exists y\ P(x,y)$		**E**¬ 8

Observad que los puntos 3 y 4 se podrían haber resumido en uno solo porque:

$$\neg\forall x\ \exists y\ P(x,y) \dashv\vdash \exists x\ \forall y\ \neg P(x,y)$$

h)

(1)	$\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ (M(y) \to A(x,y))]$		**P**
(2)	$\neg\exists x\ [P(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))]$		**P**
(3)		$\neg\forall x\ (M(x) \to \neg C(x))$	**H**
(4)		$\exists x\ (M(x) \wedge C(x))$	**ED** 3
(5)		$M(a) \wedge C(a)$	**E**$\exists$ 4
(6)		$P(b) \wedge \forall y\ (M(y) \to A(b,y))$	**E**$\exists$ 1
(7)		$\forall x\ [P(x) \to \forall y\ (C(y) \to \neg A(x,y))]$	**ED** 2
(8)		$P(b) \to \forall y\ (C(y) \to \neg A(b,y))$	**E**$\forall$ 7
(9)		$P(b)$	**E**$\wedge$ 6
(10)		$\forall y\ (C(y) \to \neg A(b,y))$	**E**$\to$ 8, 9
(11)		$\forall y\ (M(y) \to A(b,y))$	**E**$\wedge$ 6
(12)		$C(a) \to \neg A(b,a)$	**E**$\forall$ 10
(13)		$M(a) \to A(b,a)$	**E**$\forall$ 11
(14)		$C(a)$	**E**$\wedge$ 5
(15)		$M(a)$	**E**$\wedge$ 5
(16)		$\neg A(b,a)$	**E**$\to$ 12, 14
(17)		$A(b,a)$	**E**$\to$ 13, 15
(18)	$\neg\neg\forall x\ (M(x) \to \neg C(x))$		**I**$\neg$ 3, 16, 17
(19)	$\forall x\ (M(x) \to \neg C(x))$		**E**$\neg$ 18

Observad que el paso 7 es, en el fondo, la interiorización de la negación de la segunda premisa:

$\neg\exists x\ [P(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))] \dashv\vdash \forall x\ \neg[P(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))] \dashv\vdash$
$\dashv\vdash \forall x\ [\neg P(x) \vee \neg\exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))] \dashv\vdash \forall x\ [\neg P(x) \vee \forall y\ \neg(C(y) \wedge A(x,y))] \dashv\vdash$
$\dashv\vdash \forall x\ [\neg P(x) \vee \forall y\ (\neg C(y) \vee \neg A(x,y))] \dashv\vdash \forall x\ [P(x) \to \forall y\ (\neg C(y) \vee \neg A(x,y))] \dashv\vdash$
$\dashv\vdash \forall x\ [P(x) \to \forall y\ (C(y) \to \neg A(x,y))]$

11.
a)

(1)	$\forall x\ \forall y\ [M(x) \wedge G(x,y) \to P(x,y)]$	**P**
(2)	$\neg P(a,b)$	**P**
(3)	$G(a,b)$	**P**
(4)	$\forall y\ [M(a) \wedge G(a,y) \to P(a,y)]$	**E**$\forall$ 1
(5)	$M(a) \wedge G(a,b) \to P(a,b)$	**E**$\forall$ 4
(6)	$\neg(M(a) \wedge G(a,b))$	**MT** 2, 5
(7)	$\neg M(a) \vee \neg G(a,b)$	**ED** 6
(8)	$\neg M(a)$	**SD** 7, 3

b)

(1)	$\exists x\ A(x) \to \exists y\ B(y)$	**P**
(2)	$\forall x\ (B(x) \to C(x))$	**P**
(3)	$\neg\exists x\ C(x)$	**P**
(4)	$\forall x\ \neg C(x)$	**ED** 3
(5)	$B(u) \to C(u)$	**E**$\forall$ 2
(6)	$\neg C(u)$	**E**$\forall$ 4
(7)	$\neg B(u)$	**MT** 5, 6
(8)	$\forall y\ \neg B(y)$	**I**$\forall$ 7
(9)	$\neg\exists y\ B(y)$	**ED** 8
(10)	$\neg\exists x\ A(x)$	**MT** 1, 9
(11)	$\forall x\ \neg A(x)$	**ED** 10

c)

(1)	$\forall x\, A(x) \rightarrow \exists y\, B(y)$		**P**
(2)		$\neg\exists z\, (A(z) \rightarrow B(z))$	**H**
(3)		$\forall z\, \neg(A(z) \rightarrow B(z))$	**ED** 2
(4)		$\forall z\, (A(z) \wedge \neg B(z))$	**ED** 3
(5)		$A(u) \wedge \neg B(u)$	**E**$\forall$ 4
(6)		$A(u)$	**E**$\wedge$ 5
(7)		$\forall x\, A(x)$	**I**$\forall$ 6
(8)		$\exists y\, B(y)$	**E**$\rightarrow$ 1, 7
(9)		$B(a)$	**E**$\exists$ 8
(10)		$A(a) \wedge \neg B(a)$	**E**$\forall$ 4
(11)		$\neg B(a)$	**E**$\wedge$ 10
(12)	$\neg\neg\exists z\, (A(z) \rightarrow B(z))$		**I**$\neg$ 2, 9, 11
(13)	$\exists z\, (A(z) \rightarrow B(z))$		**E**$\neg$ 12

d)

(1)	$\neg\exists x\, \{ O(x) \wedge \exists y\, [G(y) \wedge A(x,y)] \}$		**P**
(2)	$\forall x\, (P(x) \rightarrow G(x))$		**P**
(3)		$\exists x\, \{ O(x) \wedge \exists y\, [P(y) \wedge A(x,y)] \}$	**H**
(4)		$O(a) \wedge \exists y\, [P(y) \wedge A(a,y)]$	**E**$\exists$ 3
(5)		$\exists y\, [P(y) \wedge A(a,y)]$	**E**$\wedge$ 4
(6)		$P(b) \wedge A(a,b)$	**E**$\exists$ 5
(7)		$P(b) \rightarrow G(b)$	**E**$\forall$ 2
(8)		$P(b)$	**E**$\wedge$ 6
(9)		$G(b)$	**E**$\rightarrow$ 7, 8
(10)		$A(a,b)$	**E**$\wedge$ 6
(11)		$G(b) \wedge A(a,b)$	**I**$\wedge$ 9, 10
(12)		$\exists y\, [G(y) \wedge A(a,y)]$	**I**$\exists$ 11
(13)		$O(a)$	**E**$\wedge$ 4
(14)		$O(a) \wedge \exists y\, [G(y) \wedge A(a,y)]$	**I**$\wedge$ 12, 13
(15)		$\exists x\, \{ O(x) \wedge \exists y\, [G(y) \wedge A(x,y)] \}$	**I**$\exists$ 14
(16)		$\neg\exists x\, \{ O(x) \wedge \exists y\, [G(y) \wedge A(x,y)] \}$	**it** 1
(17)	$\neg\exists x\, \{ O(x) \wedge \exists y\, [P(y) \wedge A(x,y)] \}$		**I**$\neg$ 3, 15, 16

12.

a) En el dominio { 1, 2 }, la premisa del razonamiento es equivalente a:

$$\forall x\, [(Q(x) \rightarrow P(1,x)) \vee (Q(x) \rightarrow P(2,x))], \text{ que es equivalente a:}$$
$$[(Q(1) \rightarrow P(1,1)) \vee (Q(1) \rightarrow P(2,1))] \wedge [(Q(2) \rightarrow P(1,2)) \vee (Q(2) \rightarrow P(2,2))],$$

y su valor en la interpretación dada es:

$$[(V \rightarrow V) \vee (V \rightarrow F)] \wedge [(V \rightarrow F) \vee (V \rightarrow V)] = V$$

En lo que respecta a la conclusión, en el dominio { 1, 2 }, es equivalente a:

$$\exists y\, [(Q(1) \rightarrow P(y,1)) \wedge (Q(2) \rightarrow P(y,2))] \text{ que es equivalente a:}$$

$$[(Q(1) \rightarrow P(1,1)) \wedge (Q(2) \rightarrow P(1,2))] \vee [(Q(1) \rightarrow P(2,1)) \wedge (Q(2) \rightarrow P(2,2))],$$

y su valor en la interpretación dada es:

$$[(V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow F)] \vee [(V \rightarrow F) \wedge (V \rightarrow V)] = F$$

De este modo, la interpretación es un contraejemplo del razonamiento porque hace ciertas sus premisas y falsa la conclusión. Y esto nos permite afirmar que el razonamiento no es válido.

b) En un dominio de un solo elemento, por ejemplo { 1 }, la premisa del razonamiento es equivalente a $Q(1) \rightarrow P(1,1)$ y la conclusión es equivalente a $Q(1) \rightarrow P(1,1)$. Dado que se

trata del mismo enunciado, es imposible hacer cierto el primero y falso el segundo. En consecuencia, podemos afirmar que el razonamiento no tiene ningún contraejemplo en un dominio de un solo elemento.

c) Una interpretación no es un contraejemplo si hace falsa alguna de las premisas o cierta la conclusión (o las dos cosas simultáneamente). Intentaremos encontrar una interpretación que haga cierta la conclusión.

Se trata de que sea cierto el enunciado:

$$[(Q(1) \to P(1,1)) \wedge (Q(2) \to P(1,2))] \vee [(Q(1) \to P(2,1)) \wedge (Q(2) \to P(2,2))].$$

Dado que es una disyunción, bastará con hacer que uno de los disyuntandos sea cierto. Tomamos el primero $(Q(1) \to P(1,1)) \wedge (Q(2) \to P(1,2))$. Una manera de hacerlo cierto es que: $Q(1) = \text{F}$ y $Q(2) = \text{F}$. De este modo, una interpretación que no es un contraejemplo es:

$$<\{ 1, 2 \}, \{ Q(1) = \text{F}, Q(2) = \text{F}, P(1,1) = V, P(1,2) = \text{V}, P(2,1) = \text{V}, P(2,2) = \text{V} \}, \varnothing>$$

y otra es:

$$<\{ 1, 2 \}, \{ Q(1) = \text{F}, Q(2) = \text{F}, P(1,1) = \text{F}, P(1,2) = \text{V}, P(2,1) = \text{F}, P(2,2) = \text{V} \}, \varnothing>$$

13. En el dominio { 1 }, el razonamiento equivale a:

$$P(1,1),\ P(1,1) \to P(1,1) \therefore P(1,1), \text{ que és vàlid.}$$

Esto quiere decir que el razonamiento no tiene contraejemplos en los dominios de tamaño 1. En el dominio { 1, 2 } podemos reescribir la primera premisa como $P(1,1) \wedge P(2,2)$. La tercera interpretación hace falsa este enunciado y, en consecuencia, no es un contraejemplo. También en el dominio { 1, 2 }, podemos reescribir la conclusión del razonamiento como:

$$(P(1,1) \wedge P(1,2)) \vee (P(2,1) \wedge P(2,2)).$$

La segunda interpretación hace cierto este enunciado y, en consecuencia, tampoco es un contraejemplo.
Dado que ninguna de las tres interpretaciones es un contraejemplo, no puede afirmarse que el razonamiento sea incorrecto. Ahora bien, tampoco puede afirmarse que sea correcto porque quizá hay otra interpretación que sí sea un contraejemplo.
De hecho, el razonamiento no es correcto porque la siguiente interpretación sí que es un contraejemplo:

$$<\{ 1, 2 \}, \{ P(1,1) = \text{V}, P(1,2) = \text{F}, P(2,1) = \text{F}, P(2,2) = \text{V} \}, \varnothing>$$

14. Las tres interpretaciones hacen falsa la segunda premisa y, entonces, ninguna de las tres es un contraejemplo. El hecho de no encontrar un contraejemplo no nos permite afirmar nada sobre la validez o invalidez del razonamiento. Ahora bien, podemos demostrar que el razonamiento es válido por otros medios:

(1)	$\forall x\, [P(x) \to \exists y\, Q(x,y)]$		**P**
(2)	$\forall x\, \forall y\, \neg Q(x,y)$		**P**
(3)		$\exists x\, P(x)$	**H**
(4)		$P(a)$	**E**$\exists$ 3
(5)		$P(a) \to \exists y\, Q(a,y)$	**E**$\forall$ 1
(6)		$\exists y\, Q(a,y)$	**E**$\to$ 4, 5
(7)		$Q(a,b)$	**E**$\exists$ 6
(8)		$\forall y\, \neg Q(a,y)$	**E**$\forall$ 2
(9)		$\neg Q(a,b)$	**E**$\forall$ 8
(10)	$\neg \exists x\, P(x)$		**I**$\neg$ 3, 7, 9

15. Un contraejemplo debe hacer falsa la conclusión, pero la primera y la segunda interpretación no lo hacen. La tercera interpretación sí que es un contraejemplo por lo siguiente.

- La primera premisa se puede reescribir:

  $(A(1) \wedge R(1,1) \to C(1)) \wedge (A(1) \wedge R(1,2) \to C(2)) \wedge (A(2) \wedge R(2,1) \to C(1)) \wedge (A(2) \wedge R(2,2) \to C(2))$, y su valor en la tercera interpretación es:

  $$(\text{V} \wedge \text{F} \to \text{F}) \wedge (\text{V} \wedge \text{F} \to \text{F}) \wedge (\text{F} \wedge \text{V} \to \text{F}) \wedge (\text{F} \wedge \text{V} \to \text{F}) = \text{V}$$

- La segunda premisa se puede reescribir $A(1)$ y es cierta en la tercera interpretación.

- Finalmente, podemos reescribir la tercera premisa como:

$$R(1,1) \vee R(1,2) \vee R(2,1) \vee R(2,2)$$

Y su valor en la tercera interpretación es F ∨ F ∨ V ∨ V = V.

Dado que el razonamiento tiene, como mínimo, un contraejemplo, podemos afirmar que es incorrecto.

16.
a) $P(x)$: "x es un político"; $I(x)$: "x es inteligente"; $F(x)$: "x es funcionario"

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow I(x)),\ \exists x\ (F(x) \wedge I(x))\ \therefore\ \exists x\ (P(x) \wedge F(x))$$

En un dominio de un solo elemento, por ejemplo {1}, el razonamiento es equivalente a:

$$P(1) \rightarrow I(1),\ F(1) \wedge I(1)\ \therefore\ P(1) \wedge F(1)$$

Hacemos la tabla de verdad:

$P(1)$	$I(1)$	$F(1)$	$P(1) \rightarrow I(1)$	$F(1) \wedge I(1)$	$P(1) \wedge F(1)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	
V	F	V	F		
V	F	F	F		
F	**V**	**V**	V	V	F
F	V	F	V	F	
F	F	V	V	F	
F	F	F	V	F	

Descubrimos que la interpretación <{ 1 }, { $P(1) = F$, $I(1) = V$, $F(1) = V$ }, ∅> es un contraejemplo.

b) $D(x)$: "x es una mujer"; $R(x)$: "x es responsable"

$$\exists x\ (D(x) \wedge R(x))\ \therefore\ \forall x\ R(x)$$

En un dominio de un solo elemento el razonamiento no tiene ningún contraejemplo porque:

$D(1) \wedge R(1)\ \therefore\ R(1)$ es un razonamiento correcto.

En un dominio de dos elementos, sí que hay contraejemplos (buscamos una situación en la que no todos los elementos del dominio sean "responsable", pero que uno de ellos –una mujer– sí que lo sea. De esta forma haremos cierta la premisa y falsa la conclusión). Por ejemplo:

<{ 1, 2 }, { $D(1) = V$, $D(2) = V$, $R(1) = V$, $R(2) = F$ }, ∅>

c) $E(x)$: "x se ha examinado"; $A(x)$: "x puede ser (es) apto"; $R(x)$: "x puede ser (es) recomendado"

$$\forall x\ (A(x) \rightarrow E(x)),\ \forall x\ (R(x) \rightarrow A(x))\ \therefore\ \forall x\ (E(x) \rightarrow R(x))$$

En un dominio de un solo elemento, { 1 }, podemos rescribir este razonamiento:

$$A(1) \rightarrow E(1),\ R(1) \rightarrow A(1)\ \therefore\ E(1) \rightarrow R(1)$$

Un contraejemplo debe hacer falso $E(1) \rightarrow R(1)$. La única posibilidad es $E(1)$ = V y $R(1)$ = F. Para hacer cierto $A(1) \rightarrow E(1)$ cuando $E(1)$ = V, puede ser $A(1)$ = V. De este modo, un contraejemplo del razonamiento es:

<{ 1 }, { $E(1)$ = V, $A(1)$ = V, $R(1)$ = F }, ∅>

C on $A(1) = F$ también se consigue que la primera premisa sea cierta.

d) $M(x)$: "x es un marciano"; $D(x)$: "x es un desintegrador"; $T(x,y)$: "x tiene y"

$$\forall x\ [M(x) \rightarrow \exists y\ (D(y) \wedge T(x,y))],\ \neg\exists x\ D(x)\ \therefore\ \exists x[M(x) \wedge \neg\exists y\ (D(y) \wedge T(x,y))]$$

En un dominio de un solo elemento el razonamiento se puede reescribir:

$$M(1) \rightarrow D(1) \wedge T(1,1),\ \neg D(1)\ \therefore\ M(1) \wedge \neg(D(1) \wedge T(1,1))$$

Un contraejemplo debe hacer cierto $\neg D(1)$ y la única posibilidad es $D(1)$ = F. La conclusión del razonamiento debe ser falsa. Si $M(1)$ = F entonces la conclusión es falsa y la primera premisa cierta, independientemente de lo que sea $T(1,1)$. De este modo, un contraejemplo del razonamiento es:

$$<\{\ 1\ \},\ \{\ M(1) = F,\ D(1) = F,\ T(1,1) = F\ \},\ \varnothing>.$$

17. En cada apartado, los números romanos indican los pasos que se efectúan:

a)

i) $\exists x\ \{P(x) \wedge \neg\exists y\ [O(y) \wedge T(x,y)]\}$
ii) $\exists x\ \{P(x) \wedge \forall y\ [\neg O(y) \vee \neg T(x,y)]\}$
iii) $P(a) \wedge \forall y\ [\neg O(y) \vee \neg T(a,y)]$
iv) $\boldsymbol{\forall y\ [P(a) \wedge (\neg O(y) \vee \neg T(a,y))]}$

b)

i) $\forall x\ [P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y)] \rightarrow \exists z\ R(z)$
ii) $\neg\forall x\ [\neg P(x) \vee \exists y\ Q(x,y)] \vee \exists z\ R(z)$
iii) $\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ \neg Q(x,y)] \vee \exists z\ R(z)$
iv) $(P(a) \wedge \forall y\ \neg Q(a,y)) \vee R(b)$
v) $\forall y\ [(P(a) \wedge \neg Q(a,y)) \vee R(b)]$
vi) $\boldsymbol{\forall y\ [(P(a) \vee R(b)) \wedge (\neg Q(a,y) \vee R(b))]}$

c)

i) $\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ Q(x,y)] \rightarrow \forall z\ \exists u\ R(z,u)$
ii) $\neg\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ Q(x,y)] \vee \forall z\ \exists u\ R(z,u)$
iii) $\forall x\ [\neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(x,y)] \vee \forall z\ \exists u\ R(z,u)$
iv) $\forall x\ [\neg P(x) \vee \neg Q(x,f(x))] \vee \forall z\ R(z,g(z))$
v) $\boldsymbol{\forall x\ \forall z\ [\neg P(x) \vee \neg Q(x,f(x)) \vee R(z,g(z))]}$

d)

i) $\forall x\ \{P(x) \wedge \exists y\ [O(y) \wedge T(x,y)] \rightarrow \exists z\ [O(z) \wedge N(z) \wedge T(x,z)]\}$
ii) $\forall x\ \{\ \neg(P(x) \wedge \exists y\ [O(y) \wedge T(x,y)]) \vee \exists z\ [O(z) \wedge N(z) \wedge T(x,z)]\}$
iii) $\forall x\ \{(\neg P(x) \vee \forall y\ [\neg O(y) \vee \neg T(x,y)]) \vee \exists z\ [O(z) \wedge N(z) \wedge T(x,z)]\}$
iv) $\forall x\ \{(\neg P(x) \vee \forall y\ [\neg O(y) \vee \neg T(x,y)]) \vee [O(f(x)) \wedge N(f(x)) \wedge T(x,\ f(x))]\}$
v) $\forall x\ \forall y\ \{\ \neg P(x) \vee \neg O(y) \vee \neg T(x,y) \vee [O(f(x)) \wedge N(f(x)) \wedge T(x,\ f(x))]\}$
vi) $\boldsymbol{\forall x\ \forall y\ \{[\ \neg P(x) \vee \neg O(y) \vee \neg T(x,y) \vee O(f(x))] \wedge}$
$\boldsymbol{\wedge [\neg P(x) \vee \neg O(y) \vee \neg T(x,y) \vee N(f(x))] \wedge}$
$\boldsymbol{\wedge [\neg P(x) \vee \neg O(y) \vee \neg T(x,y) \vee T(x,f(x))]\ \}}$

e)

i) $\forall x\ \{P(x) \wedge \exists y\ [R(x,y) \wedge \forall z\ T(y,z)] \rightarrow \exists u\ Q(x,u)\}$
ii) $\forall x\ \{\ \neg(P(x) \wedge \exists y\ [R(x,y) \wedge \forall z\ T(y,z)]) \vee \exists u\ Q(x,u)\}$
iii) $\forall x\ \{(\neg P(x) \vee \forall y\ [\neg R(x,y) \vee \exists z\ \neg T(y,z)]) \vee \exists u\ Q(x,u)\}$
iv) $\forall x\ \{(\neg P(x) \vee \forall y\ [\neg R(x,y) \vee \neg T(y,f(x,y))]) \vee Q(x,g(x))\}$
v) $\boldsymbol{\forall x\ \forall y\ [\neg P(x) \vee \neg R(x,y) \vee \neg T(y,f(x,y)) \vee Q(x,g(x))]}$

f)

i) $\exists x\ \{P(x) \wedge \forall y\ [T(x,y) \rightarrow O(y) \wedge N(y)]\}$
ii) $\exists x\ \{P(x) \wedge \forall y\ [\neg T(x,y) \vee (O(y) \wedge N(y))]\}$
iii) $P(a) \wedge \forall y\ [\neg T(a,y) \vee (O(y) \wedge N(y))]$
iv) $\forall y\ \{P(a) \wedge [\neg T(a,y) \vee (O(y) \wedge N(y))]\}$
v) $\boldsymbol{\forall y\ [P(a) \wedge (\neg T(a,y) \vee O(y)) \wedge (\neg T(a,y) \vee N(y))]}$

18.

a) En el último paso la interiorización de la negación (aplicación de De Morgan) no se ha hecho correctamente. Debería ser $\forall x\ \forall y\ [(\neg Q(x) \wedge \neg R(y)) \vee T(x,y)]$ y finalmente se obtendría:

$$\forall x\ \forall y\ [(\neg Q(x) \vee T(x,y)) \wedge (\neg R(y) \vee T(x,y))]$$

b) Se ha utilizado la misma constante para cuantificadores existenciales distintos. Debería ser:

$$\forall x\ T(x,a) \wedge Q(b)$$

c) El error se halla en el tercer paso: la segunda aparición de la variable y dentro de la fórmula está afectada por el mismo cuantificador que la primera. Las dos apariciones deben sustituirse por la misma constante. Además, el cuantificador $\exists z$ está dentro del alcance del cuantificador $\forall x$, de modo que la variable z se debería sustituir por una función de x. Tendría que ser:

$$\forall x\ [\neg T(x,a) \vee Q(f(x),a)]$$

d) En el último paso, la matriz de la fórmula no está en FNC, sino en FND. Debería ser:

$$\forall x\ \forall z\ [(C(a) \vee \neg R(z) \vee T(f(z),z)) \wedge (T(x,a) \vee \neg R(z) \vee T(f(z),z))]$$

e) En el segundo paso la eliminación del cuantificador existencial se ha hecho prematuramente. Primero se tendría que haber eliminado la implicación. Debería ser:

ii) $\forall x\ [\neg(C(x) \wedge \exists y\ T(x,y)) \vee \forall z\ R(z)]$
iii) $\forall x\ [\neg C(x) \vee \neg\exists y\ T(x,y) \vee \forall z\ R(z)]$
iv) $\forall x\ [\neg C(x) \vee \forall y\ \neg T(x,y) \vee \forall z\ R(z)]$
v) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\neg C(x) \vee \neg T(x,y) \vee R(z)]$

f) En el tercer paso se ha aplicado mal la interiorización de la negación (De Morgan) porque $\neg\exists x\ A(x) \dashv\,\vdash \forall x\ \neg A(x)$. Tendría que ser:

iii) $\forall x\ \neg[Q(x) \vee R(x)] \vee \forall y\ \exists z\ T(y,z)$
iv) $\forall x\ [\neg Q(x) \wedge \neg R(x)] \vee \forall y\ \exists z\ T(y,z)$
v) $\forall x\ [\neg Q(x) \wedge \neg R(x)] \vee \forall y\ T(y,f(y))$
vi) $\forall x\ \forall y\ [(\neg Q(x) \vee T(y,f(y))) \wedge (\neg R(x) \vee T(y,f(y)))]$

g) El tercer paso es incorrecto: el cuantificador $\exists t$ está bajo el alcance de dos cuantificadores universales: $\forall x$ y $\forall z$. Por este motivo, la variable t debe sustituirse por una función de x y de z. Debería ser:

$$\forall x\ \{ \neg R(x) \vee \forall z\ [\neg T(f(x),z) \vee (S(x,g(x,z),z) \wedge Q(g(x,z)))] \}.$$

Al final se obtendría:

$$\forall x\ \forall z\ \{ (\neg R(x) \vee \neg T(f(x),z) \vee S(x,g(x,z),z)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg T(f(x),z) \vee Q(g(x,z))) \}$$

h) El error se halla en el tercer paso. Las variables z y t tienen que sustituirse por funciones de x y de y pero cada una de las funciones debe tener un nombre diferente (para cada variable la función debe ser nueva). Tendría que ser:

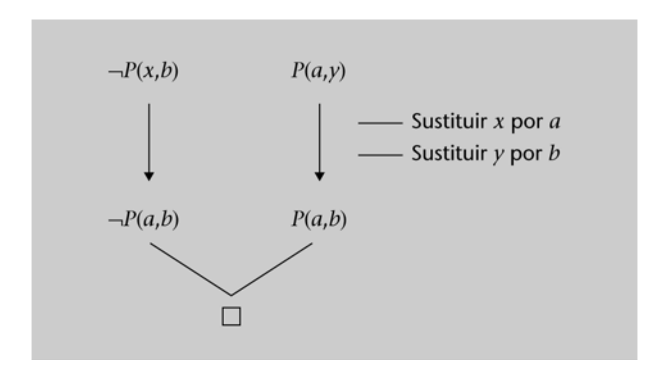
iii) $\forall x\ \forall y\ \{ \neg T(x,y) \vee \forall u\ [\neg S(f(x,y),g(x,y),u) \vee (\neg R(x) \wedge Q(y))] \}$
iv) $\forall x\ \forall y\ \forall u\ \{ \neg T(x,y) \vee [\neg S(f(x,y),g(x,y),u) \vee (\neg R(x) \wedge Q(y))] \}$
v) $\forall x\ \forall y\ \forall u\ \{ [\neg T(x,y) \vee \neg S(f(x,y),g(x,y),u) \vee \neg R(x)] \wedge [\neg T(x,y) \vee \neg S(f(x,y),g(x,y),u) \vee Q(y)] \}$

19.

a)

- $\text{FNS}(\exists x\ \forall y\ P(x,y)) = \forall y\ P(a,y)$
- $\text{FNS}(\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y)) = \forall x\ \neg P(x,b)$

$$\{ P(a,y), \neg P(x,b) \}$$

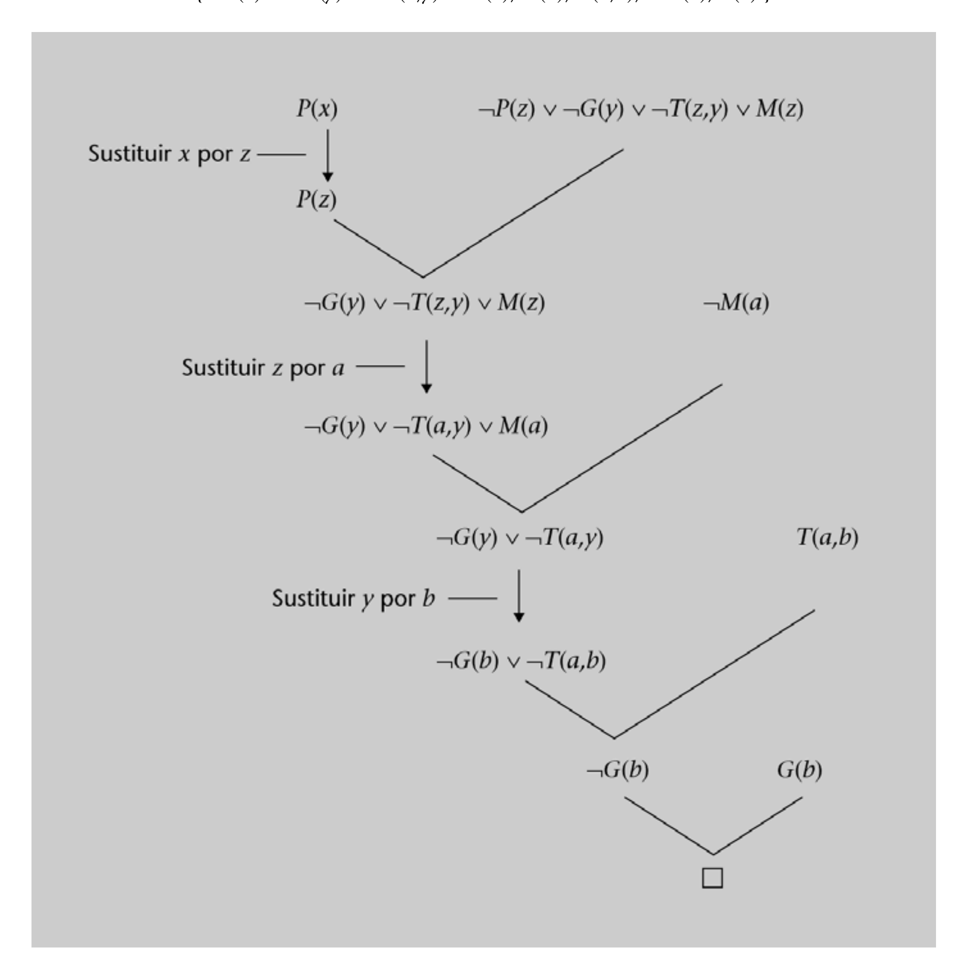


El razonamiento es correcto.

b)

- FNS($\forall x\ [P(x) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge T(x,y)) \rightarrow M(x)]$) = $\forall x\ \forall y\ (\neg P(x) \vee \neg G(y) \vee \neg T(x,y) \vee M(x))$
- FNS($G(b) \wedge T(a,b)$) = $G(b) \wedge T(a,b)$
- FNS($\neg M(a)$) = $\neg M(a)$
- FNS($\neg\neg\forall x\ P(x)$) = $\forall x\ P(x)$

$$\{ \neg P(x) \vee \neg G(y) \vee \neg T(x,y) \vee M(x),\ G(b),\ T(a,b),\ \neg M(a),\ P(x) \}$$



El razonamiento es correcto.

c)

- FNS($\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$) = $\forall x\ (\neg P(x) \vee Q(x))$
- FNS($\forall x\ (R(x) \rightarrow P(x))$) = $\forall x\ (\neg R(x) \vee P(x))$
- FNS($\neg\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$) = $Q(a) \wedge \neg R(a)$

$\{ \neg P(x) \vee Q(x),\ \neg R(x) \vee P(x),\ Q(a),\ \neg R(a) \}$

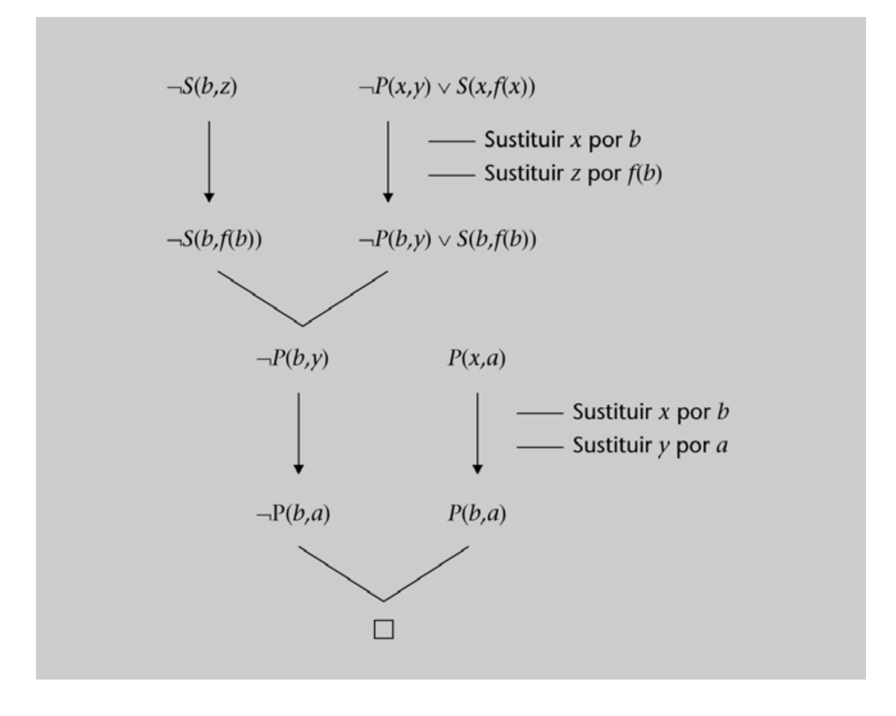
De este conjunto de cláusulas no podrá obtenerse la cláusula vacía. La ausencia del literal $\neg Q$ descarta las cláusulas que contienen este predicado y reducen el conjunto a $\{ \neg R(x) \vee P(x), \neg R(a) \}$. Las dos cláusulas que han quedado no se pueden resolver entre sí. El razonamiento no es correcto.

d)

- FNS($\forall x\ [\exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists z\ S(x,z)]$) = $= \forall x\ \forall y\ (\neg P(x,y) \vee S(x,f(x)))$
- FNS($\exists y\ \forall x\ P(x,y)$) = $\forall x\ P(x,a)$
- FNS($\neg\forall x\ \exists z\ S(x,z)$) = $\forall z\ \neg S(b,z)$

$$\{ \neg P(x,y) \vee S(x,f(x)),\ P(x,a),\ \neg S(b,z) \}$$

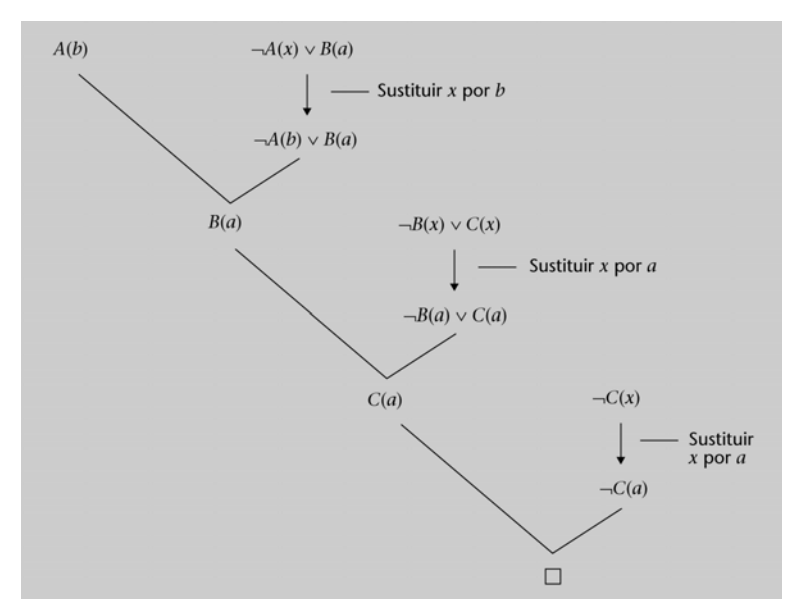
El razonamiento es correcto.



e)

- FNS($\exists x\ A(x) \rightarrow \exists y\ B(y)$) = $\forall x\ (\neg A(x) \vee B(a))$
- FNS($\forall x\ (B(x) \rightarrow C(x))$) = $\forall x\ (\neg B(x) \vee C(x))$
- FNS($\neg\exists x\ C(x)$) = $\forall x\ \neg C(x)$
- FNS($\neg\forall x\ \neg A(x)$) = $A(b)$

$$\{ \neg A(x) \vee B(a), \neg B(x) \vee C(x), \neg C(x), A(b) \}$$



El razonamiento es correcto.

f)

- FNS($\neg\exists x\ D(x)$) = $\forall x\ \neg D(x)$
- FNS($\forall x\ [P(x) \rightarrow \exists y\ (D(y) \wedge T(x,y))]$) = $\forall x\ [(\neg P(x) \vee D(f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee T(x,f(x)))]$
- FNS($\neg\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ \neg(D(y) \wedge T(x,y))]$) = $\forall x\ [(\neg P(x) \vee D(g(x))) \wedge (\neg P(x) \vee T(x,g(x))]$

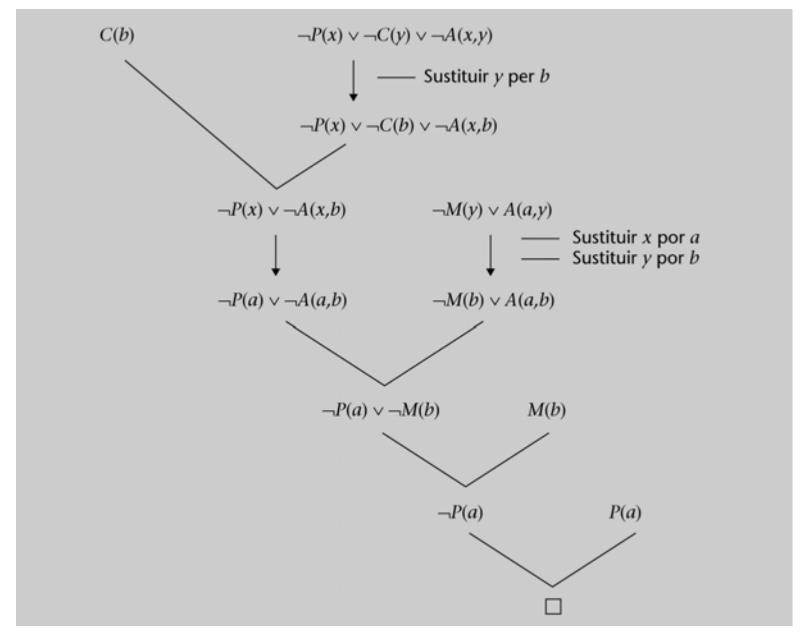
$$\{\neg D(x), \neg P(x) \vee D(f(x)), \neg P(x) \vee T(x,f(x)), \neg P(x) \vee D(g(x)), \neg P(x) \vee T(x,g(x))\}$$

La ausencia del literal P hace inútiles todas las cláusulas que contienen este predicado. Esto reduce el conjunto a { $\neg D(x)$ }. De este conjunto no puede obtenerse la cláusula vacía.

g)

- FNS($\neg\exists x\ [P(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))]$) = $\forall x\ \forall y\ (\neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y))$
- FNS($\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ (M(y) \rightarrow A(x,y))]$) = $\forall y\ [P(a) \wedge (\neg M(y) \vee A(a,y))]$
- FNS($\neg\forall x\ (C(x) \rightarrow \neg M(x))$) = $C(b) \wedge M(b)$

$$\{ \neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y), P(a), \neg M(y) \vee A(a,y), C(b), M(b) \}$$



El razonamiento es correcto.

h)

- FNS($\forall x\ P(x,x)$) = $\forall x\ P(x,x)$
- FNS($\forall x\ \forall y\ (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$) $\forall x\ \forall y\ (\neg P(x,y) \vee P(y,x))$
- FNS($\neg\exists x\ \forall y\ P(x,y)$) = $\forall x\ \neg P(x,f(x))$

$$\{\ P(x,x),\ \neg P(x,y) \vee P(y,x),\ \neg P(x,f(x))\ \}$$

El razonamiento no es correcto. Empezando con la cláusula $\neg P(x,f(x))$, no es posible resolver porque:

- Contra $P(z,z)$ (cambiamos x por z para evitar duplicidad de nombres de variables en las dos cláusulas que se pretende resolver) no se puede porque hay que sustituir una variable por una función de sí misma.

- Contra $\neg P(z,y) \vee P(y,z)$ (cambio de x por z para evitar duplicidades) hay que sustituir y por x y z por $f(x)$. La resolvente es $\neg P(f(x),x)$. Esta cláusula no puede resolverse contra $P(z,z)$ porque sería necesario hacer la sustitución de una variable por una función de sí misma. Hay que volver a utilizar $\neg P(z,y) \vee P(y,z)$ y sustituir y por $f(x)$ y z por x. Con esto se obtiene $\neg P(x,f(x))$, que es la cláusula inicial.

El razonamiento sólo puede ser correcto si las premisas son inconsistentes. Sin embargo, del conjunto $\{\ P(x,x),\ \neg P(x,y) \vee P(y,x)\ \}$ no puede obtenerse $\square$, de modo que las premisas no son inconsistentes.

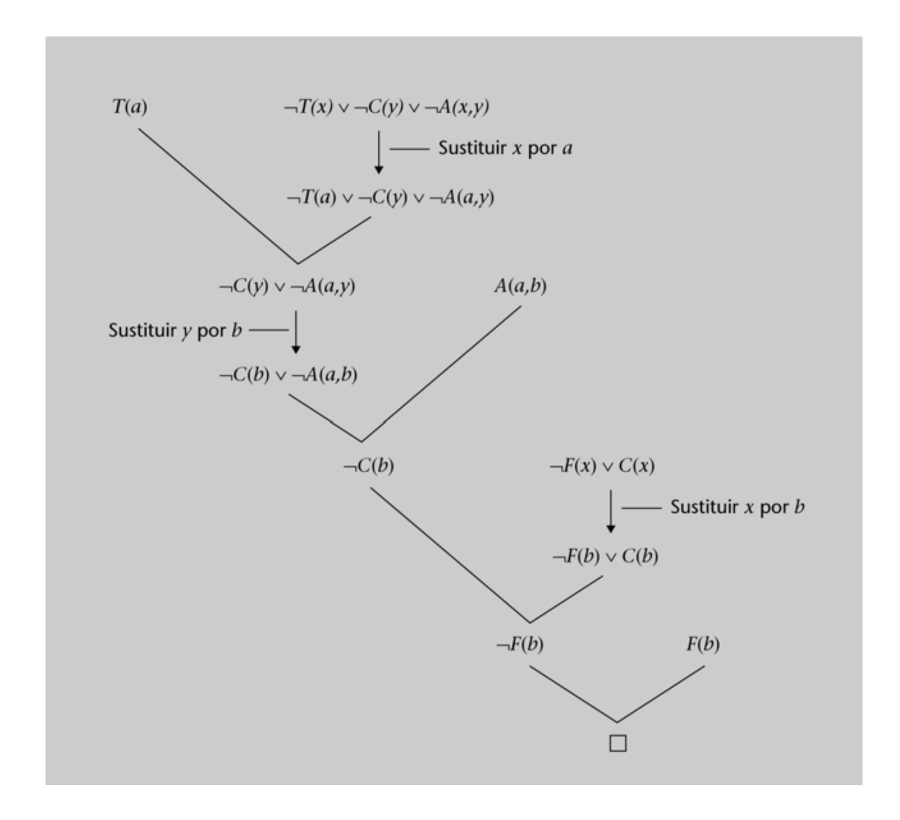
20.

a) $T(x)$: "x es (un) astrólogo"; $C(x)$: "x es (un) científico"; $F(x)$: "x es (un) físico"; $A(x,y)$: "x es amigo de y"

$$\neg\exists x\ [T(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))],\ \forall x\ (F(x) \rightarrow C(x))\ \therefore\ \neg\exists x\ [T(x) \wedge \exists y\ (F(y) \wedge A(x,y))]$$

- FNS($\neg\exists x\ [T(x) \wedge \exists y\ (C(y) \wedge A(x,y))]$) = $\forall x\ \forall y\ (\neg T(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y))$
- FNS($\forall x\ (F(x) \rightarrow C(x))$) = $\forall x\ (\neg F(x) \vee C(x))$
- FNS($\neg\neg\exists x\ [T(x) \wedge \exists y\ (F(y) \wedge A(x,y))]$) = $T(a) \wedge F(b) \wedge A(a,b)$

$$\{\ \neg T(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y),\ \neg F(x) \vee C(x),\ \mathbf{T(a)},\ \mathbf{F(b)},\ \mathbf{A(a,b)}\ \}$$

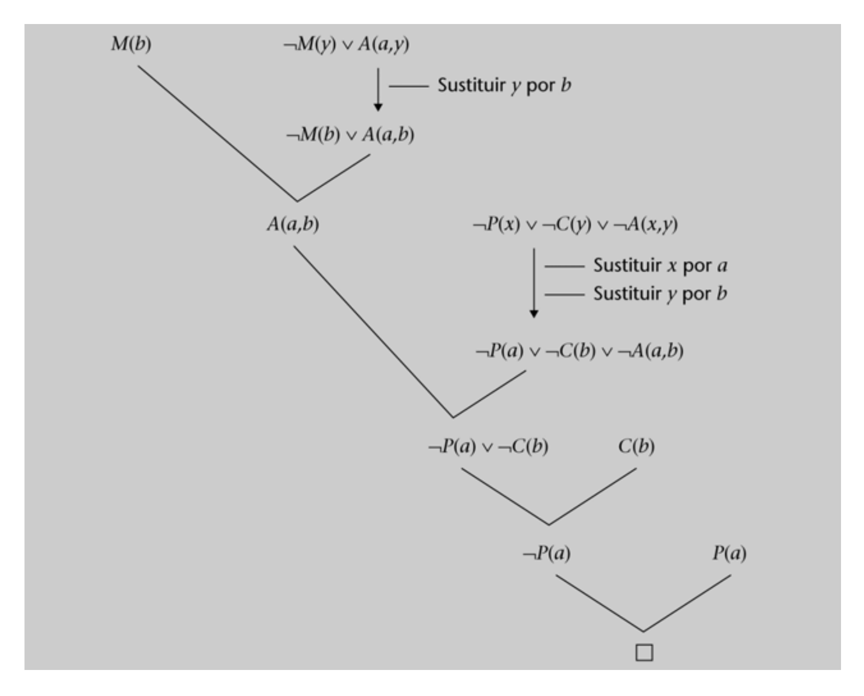


b) $P(x)$: "x es un paciente"; $M(x)$: "x es un médico"; $C(x)$: "x es curandero"; $A(x,y)$: "x admira (siente admiración por él) a y"

$$\exists x \{ P(x) \wedge \forall y [M(y) \rightarrow A(x,y)] \}, \neg\exists x \{ P(x) \wedge \exists y [C(y) \wedge A(x,y)] \} \therefore \neg\exists x [M(x) \wedge C(x)]$$

- $\text{FNS}(\exists x \{ P(x) \wedge \forall y [M(y) \rightarrow A(x,y)] \}) = \forall y [P(a) \wedge (\neg M(y) \vee A(a,y))]$
- $\text{FNS}(\neg\exists x \{ P(x) \wedge \exists y [C(y) \wedge A(x,y)]) = \forall x \forall y (\neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y))$
- $\text{FNS}(\neg\neg\exists x [M(x) \wedge C(x)]) = M(b) \wedge C(b)$

$$\{ P(a), \neg M(y) \vee A(a,y), \neg P(x) \vee \neg C(y) \vee \neg A(x,y), \mathbf{M(b)}, \mathbf{C(b)} \}$$

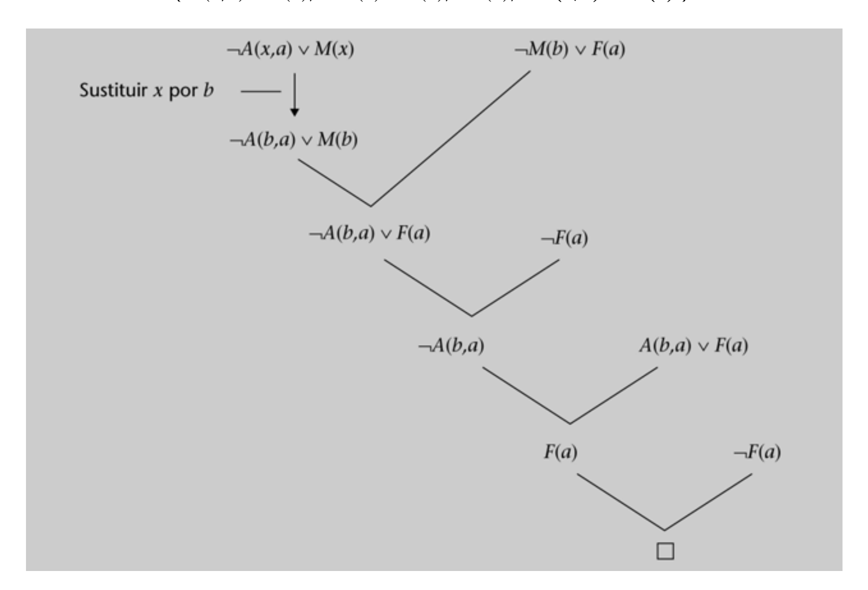


c) $F(x)$: "x es feliz"; $M(x)$: "A x le gusta la música"; $A(x,y)$: "x es amigo de y"; a (constante): "Alberto"

$$\forall x (A(x,a) \rightarrow M(x)) \rightarrow F(a), \neg F(a) \therefore \exists x (A(x,a) \wedge \neg M(x))$$

- $\text{FNS}(\forall x (A(x,a) \rightarrow M(x)) \rightarrow F(a)) = (A(b,a) \vee F(a)) \wedge (\neg M(b) \vee F(a))$
- $\text{FNS}(\neg F(a)) = \neg F(a)$
- $\text{FNS}(\neg\exists x (A(x,a) \wedge \neg M(x))) = \forall x (\neg A(x,a) \vee M(x))$

$$\{ A(b,a) \vee F(a), \neg M(b) \vee F(a), \neg F(a), \neg \mathbf{A(x,a)} \vee \mathbf{M(x)} \}$$



El razonamiento también podía formalizarse así: F: "Alberto es feliz"; $M(x)$: "A x le gusta la música"; $A(x)$: "x es amigo de Alberto".

$$\forall x (A(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow F, \neg F \therefore \exists x (A(x) \wedge \neg M(x))$$

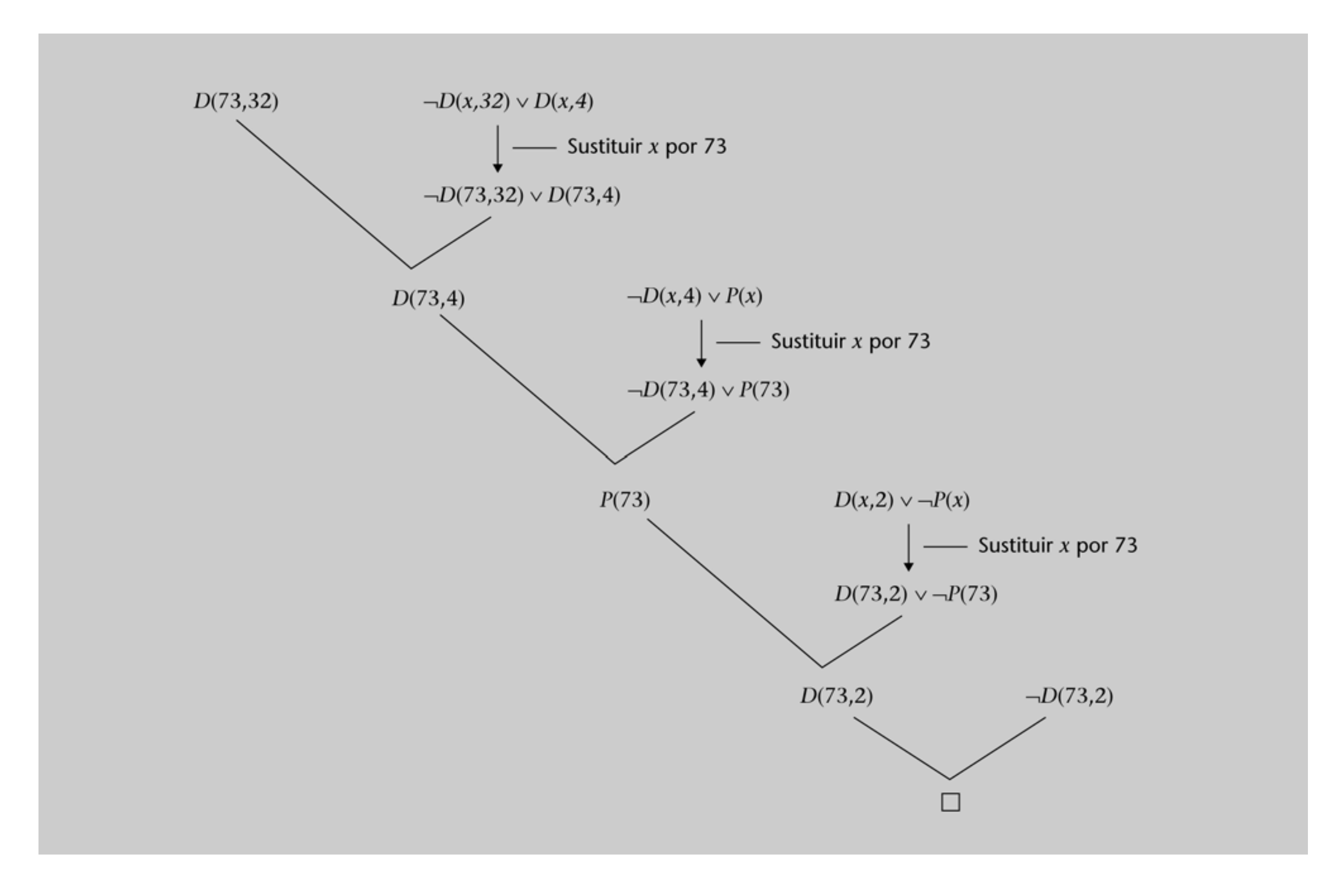
d) 2, 4, 32, 73: constantes que designan los elementos dos, cuatro, treinta y dos y setenta y tres, respectivamente; $P(x)$: "x es par"; $D(x,y)$: "x es divisible por y".

$$\forall x\,(D(x,32) \rightarrow D(x,4)),$$
$$\forall x\,(D(x,4) \rightarrow P(x)),$$
$$\forall x\,(\neg D(x,2) \rightarrow \neg P(x)),$$
$$\neg D(73,2)$$
$$\therefore\ \neg D(73,32)$$

$$\{\ \neg D(x,32) \vee D(x,4),\ \neg D(x,4) \vee P(x),\ D(x,2) \vee \neg P(x),\ \neg D(73,2),\ \mathbf{D(73,32)}\ \}$$

Aclaración formal

Para mayor claridad, no hemos permitido no seguir la convención habitual según la cual las constantes se deben designar por letras minúsculas del principio del alfabeto latino.



e) $L(x)$: "x es lingüista"; $T(x)$: "x es traductor"; $E(x)$: "x es escritor"; $N(x)$: "x es una novela"; $M(x)$: "x es un escrito narrativo"; $W(x,y)$: "x escribe y"

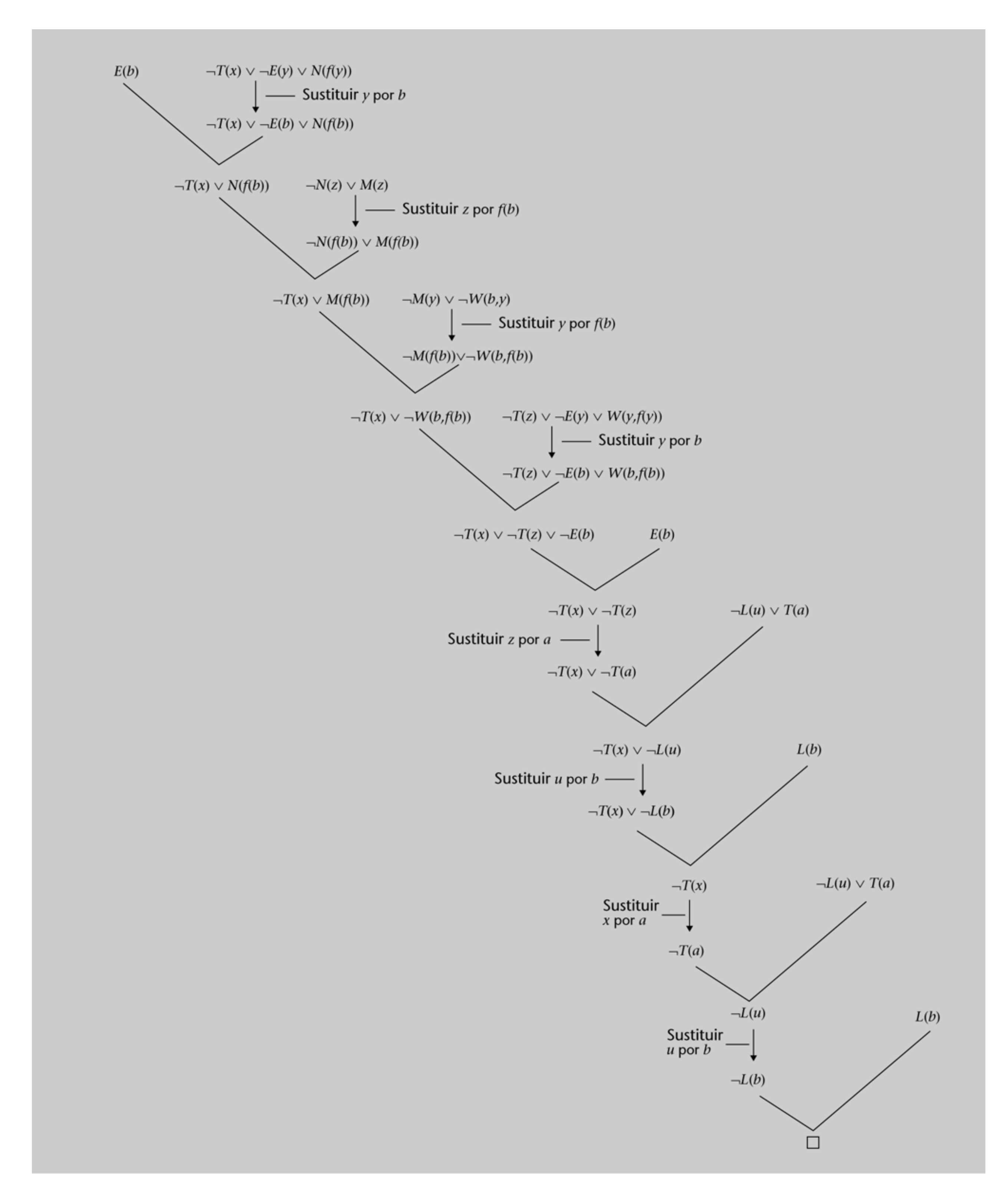
$$\exists x\, L(x) \rightarrow \exists y\, T(y),$$
$$\exists x\, T(x) \rightarrow \forall y\, \{ E(y) \rightarrow \exists z\, [N(z) \wedge W(y,z)] \},$$
$$\forall x\,(N(x) \rightarrow M(x)),$$
$$\forall x\, \{ N(x) \rightarrow \exists y\, [E(y) \wedge W(y,x)] \}$$
$$\therefore\ \forall x\, \{ E(x) \wedge L(x) \rightarrow \exists y\, [M(y) \wedge W(x,y)] \}$$

- $\text{FNS}(\exists x\, L(x) \rightarrow \exists y\, T(y)) = \forall x\,(\neg L(x) \vee T(a))$
- $\text{FNS}(\exists x\, T(x) \rightarrow \forall y\, \{ E(y) \rightarrow \exists z\, [N(z) \wedge W(y,z)] \}) =$
  $= \forall x\, \forall y\, [(\neg T(x) \vee \neg E(y) \vee N(f(y))) \wedge (\neg T(x) \vee \neg E(y) \vee W(y,f(y)))]$
- $\text{FNS}(\forall x\,(N(x) \rightarrow M(x))) = \forall x\,(\neg N(x) \vee M(x))$
- $\text{FNS}(\forall x\, \{ N(x) \rightarrow \exists y\, [E(y) \wedge W(y,x)]\}) = \forall x\, [(\neg N(x) \vee E(g(x))) \wedge (\neg N(x) \vee W(g(x),x))]$
- $\text{FNS}(\neg \forall x\, \{E(x) \wedge L(x) \rightarrow \exists y\, [M(y) \wedge W(x,y)] \}) =$
  $= \forall y\, [E(b) \wedge L(b) \wedge (\neg M(y) \vee \neg W(b,y))]$

$$\{\ \neg L(x) \vee T(a),\ \neg T(x) \vee \neg E(y) \vee N(f(y)),\ \neg T(x) \vee \neg E(y) \vee W(y,f(y)),\ \neg N(x) \vee M(x),$$
$$\neg N(x) \vee E(g(x)),\ \neg N(x) \vee W(g(x),x),\ \mathbf{E(b)},\ \mathbf{L(b)},\ \neg \mathbf{M(y)} \vee \neg \mathbf{W(b,y)}\ \}$$

Véase el árbol de resolución de la página siguiente. Observad que cuando se ha utilizado $\neg N(x) \vee M(x)$ se ha cambiado x por z para evitar la repetición de x en dos cláusulas diferentes. Lo mismo cuando se ha utilizado $\neg T(x) \vee \neg E(y) \vee W(y, f(y))$ y $\neg L(x) \vee T(a)$.

Observad también que no se han utilizado las cláusulas de la cuarta premisa "Todas las novelas son escritas por algún escritor". Esto quiere decir que la conclusión no depende de ello y que esta información es superflua para este razonamiento.

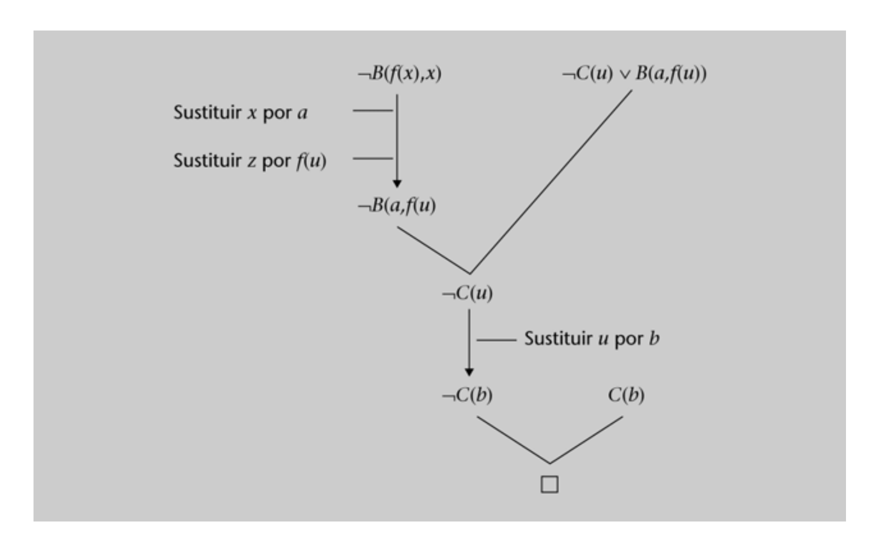


21.

a) Las cláusulas $\neg A(x,f(x))$ y $A(b,c)$ no se pueden resolver entre sí porque no pueden unificarse: la primera discrepancia $<x, b>$ se puede resolver sustituyendo x por b, con lo cual la primera cláusula queda $\neg A(b,f(b))$. La segunda discrepancia es $<f(b), c>$ y no se puede resolver.

El conjunto de cláusulas dado no permite llegar a □. Empezando con la primera cláusula de apoyo se llega a $\neg A(x,f(x))$ y a partir de este punto no se puede continuar. La situación es exactamente la misma si se empieza con la segunda cláusula de apoyo, porque ésta es precisamente $\neg A(x,f(x))$. Si se descartan las cláusulas de apoyo para verificar la posibilidad de que las premisas del razonamiento sean inconsistentes, se obtiene el conjunto formado por las dos primeras cláusulas, que no permite llegar a encontrar la cláusula vacía.

b) El problema radica en la forma en que se ha calculado y aplicado la sustitución. La variable x de $\neg B(x,z)$ no es la misma que la de $\neg C(x) \vee B(a,f(x))$. Esto quiere decir que si es necesario sustituir x por a en $\neg B(x,z)$, esta sustitución no debe aplicarse a la variable x de la otra cláusula. Para enmendar el error sólo hay que recordar que es útil cambiar el nombre de las variables de las cláusulas troncales para evitar coincidencias con las laterales.

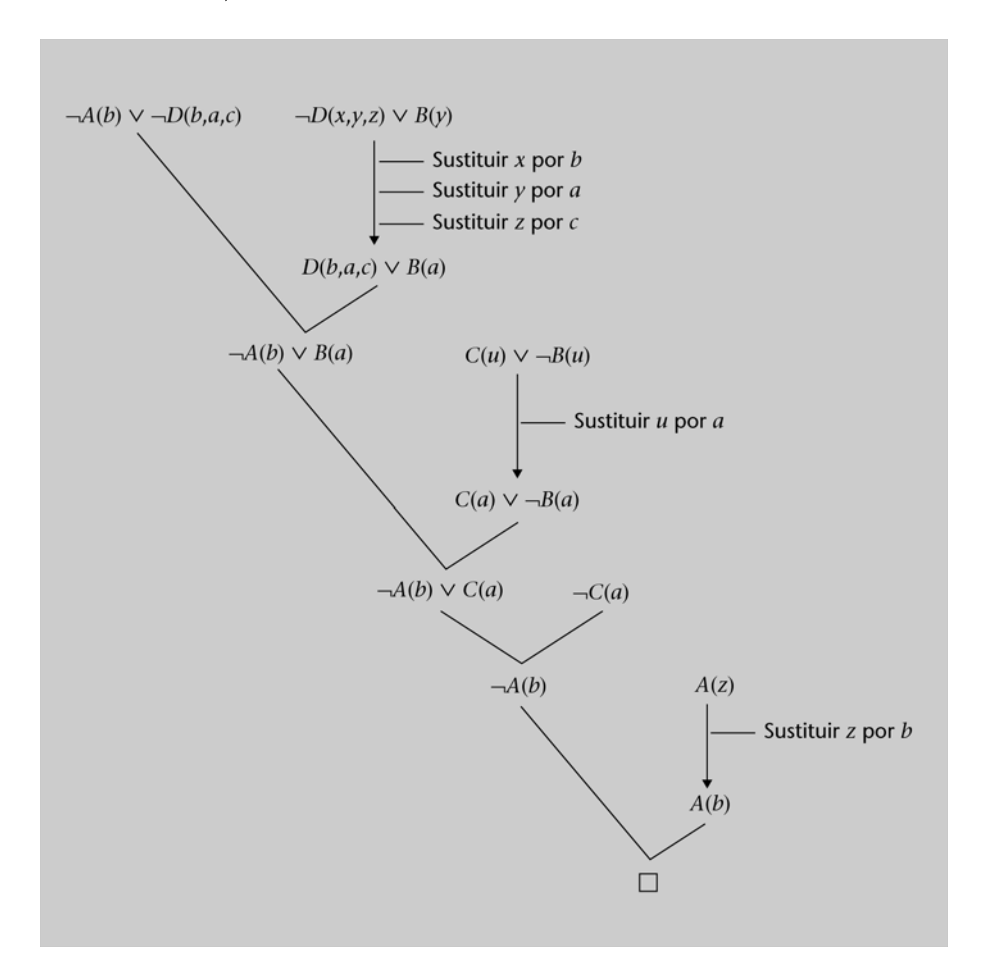


c) Hay dos errores en la resolución: primero, cuando en el segundo paso se ha sustituido y por c el resultado debería haber sido $\neg A(c) \vee \neg B(c) \vee \neg F(x,f(x))$. Y es que cuando se aplica una sustitución, deben sustituirse todas las ocurrencias de la variable involucrada. Y segundo, la afirmación de que $A(x)$ no se puede resolver contra $\neg A(a) \vee \neg A(y)$ es incorrecta. Sólo hay que sustituir x por y o y por x. Siempre hay una solución (de hecho, dos) para las discrepancias variable/variable.

Un árbol de resolución correcto sería:

d) La última aplicación de la regla de resolución no se ha hecho de forma correcta porque se ha aplicado simultáneamente a dos literales, cuando sólo se puede aplicar a uno. El resultado de resolver $\neg A(b) \vee B(a)$ contra $A(b) \vee \neg B(a)$ es un teorema (que fuerza el replanteamiento de la última decisión).

De todas formas, el razonamiento es correcto:



Glosario

algoritmo de unificación
Algoritmo que permite calcular las sustituciones que hay que aplicar a dos fórmulas para hacerlas idénticas.

constante
Representación (referencia) de un elemento distinguido de un dominio. Las constantes no se poden cuantificar.

cuantificador
operador propio de la lógica de predicados. Afecta a las variables. Hay dos tipos de cuantificadores: el universal ($\forall$) y el existencial ($\exists$).

eskolemización
Eliminación de los cuantificadores existenciales de una fórmula. Las variables cuantificadas existencialmente son sustituidas por constantes y funciones de Skolem.

fórmula
Elemento del lenguaje formal de la lógica de predicados.

predicado
Aplicación desde algún dominio hacia los enunciados. Más informalmente se puede decir que se trata de un enunciado parametrizado.

Prolog
Lenguaje de programación. Es el más conocido de los lenguajes de programación denominados *lógicos*.

propiedad
Predicado unario.

relación
Predicado binario.

término
Referencia a un objeto de un dominio. Un término puede ser una constante, una variable o una función (de Skolem).

variable
Referencia a un objeto no especificado de un dominio.

Bibliografía

Bibliografía básica

Arenas, L. (1996). *Lógica formal para informáticos*. Madrid: Díaz de Santos.

Bibliografía complementaria

Deaño, A. (1993). *Introducción a la lógica formal* (ed. original 1974). Madrid: Alianza Editorial (Alianza Universidad Textos, 11).

Garrido, M. (1995). *Lógica simbólica* (ed. original 1974). Madrid: Tecnos.

Sancho, J. (1990). *Lógica matemática y computabilidad*. Madrid: Díaz de Santos.

Suppes, P.; Hill, S. (1986). *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona: Reverté.